Hamit YAZICI
Karadeniz Teknik Üniversitesi
Elek.-Elektronik mühendisliği (1.ö)
Ø 254271
Difransiyel Denklemler
Prof.Dr. Ziya YAPAR

GIPTA

22/09/2010

Difransiyel Denklemler

Bu dersin işlenmesinde çoğunlukla "Belirsiz İntegral Hesaplamaları" kullanılacaktır.

Kaynak:

1) Bilgisayar Destekli ve modellemeli Difransiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemleri

Edwards Penney / Palma Yayıncılık
Çeviri: Ömer Akın /

2) Advenced Engineering Mathematics

Erwin Kreyszing

Bazı İntegral Formülleri

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , \quad n \neq -1$

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

3) $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} . e^{kx} + c$

4) $\int a^{kx} dx = \frac{1}{k \ln a} . a^{kx} + c \quad , \quad (a \neq 1)$

5) $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

6) $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

7) $\int sh x \, dx = ch x + c$

8) $\int ch x \, dx = sh x + c$

9) $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + c$

10) $\int \cot an x \, dx = \ln|\sin x| + c$

11) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$

12) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$

14) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$

15) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$

Kısmi integral

$$\int f(x)\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$\int x e^{2x} dx$, $u = x$, $dv = e^{2x} dx$

$du = dx$ $\quad v = \frac{1}{2} e^{2x}$

$$= x \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx$$

$$= \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c$$

Difransiyel Denklemleri incelemenin başlıca 3 kuralı vardır.

1) Belirli bir fiziksel olayı hesaplayan difransiyel denklemi bulmak.

2) Difransiyel denklemin kesin yada yaklaşık uygun bir çözümünü bulmak

3) Elde edilen çözümleri yada çözümü yorumlamak

Tanım: x, y, z, t ... bağımsız değişkenler u, v, w ... bağımlı değişkenler olsun. Bağımsız değişkenler ile bağımlı değişkenler ve bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkenlere göre türevleri arasındaki her fonksiyonel bağıntıya difransiyel denklemler denir.

1) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2xy\frac{dy}{dx} + y = 1 \quad , \quad y = y(x)$

(2. mertebeden 1. dereceden Difransiyel denklem)

2) $\frac{du}{dt} \cdot \left(\frac{d^3u}{dt^3}\right)^4 + \frac{d^2u}{dt} + u = t \quad , \quad u = u(t)$

(3. mertebeden 4. dereceden Difransiyel denklem)

3) $F(x, y, y'') = 0 \quad , \quad y = y(x)$

(2. mertebeden derecesi belli olmayan Difransiyel Denklem)

Bu 3 difransiyel denklem Adi (Elementer) difransiyel denklemdir. Biz bu derste bunlarla ilgileneceğiz.

4) $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = w = w(x,t)$

(2. mertebeden 1. dereceden Difransiyel Denklem)

Bu 4. difransiyel denklem ise Kısmi Türevli difransiyel denklemdir. Bu derste bu denklemlerle ilgilenmeyeceğiz.

#

$F(x,y)=0$, $y=y(x)$ bir kapalı fonksiyondur.

Difransiyel Denklemlerde önemli olan 2 yapı vardır.

1) Mertebe: Bir difransiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevi temsil eden sayı o denklemin mertebesini belirler.

$\frac{d^{(2)}y}{dx^{(2)}}$ > mertebeyi temsil eder.

2) Derece: Bir difransiyel denklemde en yüksek mertebeden türevli terimin (ifadenin) derecesi (kuvveti) o denklemin derecesini belirler.

$\left(\frac{d^3u}{dt^3}\right)^{(4)}$ → Bu difransiyel denklemin derecesidir.

* Herhangibir düzlemde eğri olur.

$f(x,y,c)=0$, ($c \in \mathbb{R}$ bir parametre)
→ Sonsuz değer alabilir.

↓

Düzlemde bir parametreli eğriler ailesini gösterir.

$f(x,y,c)=0$, $y=y(x)$ (1) ifadesi

$$\frac{\partial f}{\partial} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dx}}_{1} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} = 0$$ (2) ifadesi

GIPTA

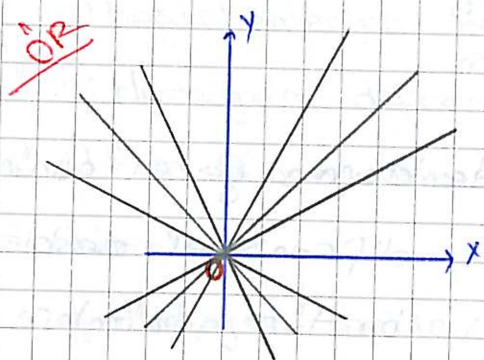
2 ifadesi c'yi içermiyorsa bu denklem söz konusu eğri topluluğunun difransiyel denklemi olur. Eğer 2 ifadesi c'yi içeriyorsa 1 ile 2 denklemi arasında parametre yok edilir. Buradan elde edilen denklem söz konusu ailenin difransiyel denklemi olur.

ÖR

$y = x + c$ → c'ye verilen her değer için paralel doğrular bulunur

$y' = 1 = \frac{dy}{dx}$

ÖR



$y = cx$

$y' = c \quad y = xy'$

ÖR $y = cx + c^2$

$y' = c \qquad y = xy' + (y')^2$

ÖR

$u = c_1 \cos 5t + c_2 \sin 5t \quad , \quad u = u(t)$

$\frac{du}{dt} = -5c_1 \sin 5t + 5c_2 \cos 5t$

2 parametrelidir.

$\frac{d^2u}{dt^2} = -25c_1 \cos 5t - 25c_2 \sin 5t$

$= -25 \underbrace{(c_1 \cos 5t + c_2 \sin 5t)}_{u}$

$\Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + 25u = 0$

ÖDEV: $x^2+y^2+c_1x+c_2y+c_3=0$, $y=y(x)$

$x^2+y^2+c_1x+c_2x+c_3=0$ 3 parametreli çember ailesindendir.

$f(x, y, c_1, c_2, c_3, \ldots c_n)=0$ için difransiyel denklemi

$F(x, y, y', y'', y''' \ldots y^n)=0$

Çözüm: $f(x, y, c, c_1, c_2, c_3 \ldots c_n)=0$ eğri ailesi n parametreli

$F(x, y, y', y'', y''' \ldots y^n)$ temsil edilen difransiyel denklem

$F(\ldots)$ tersine genel çözüm

Aykırı Çözüm: Bir difransiyel denklemin genel çözüm ailesi içersinde bulunmayan fakat difransiyel denklemi sağlayan öyle çözümler olabilir ki bu tür çözümlere aykırı çözüm denir.

$y=xy'+(y')^2$ nin genel çözümü

$y=cx+c^2$ dir.

$y=\frac{x^2}{4}$ alalım

$y'=\frac{x}{2}$, $y=xy'+(y')^2$ için

$=\frac{x^2}{4} \overset{?}{=} -x \cdot \frac{x}{2}+\left(-\frac{x}{2}\right)^2 \overset{?}{=} -\frac{x}{\underset{(2)}{2}}+\frac{x^2}{4}$

$\overset{?}{=} -\frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}$

$y=-\frac{x^2}{4}$; $y=xy'+(y')^2$ için aykırı bir çözümdür.

23/09/2010

Difransiyel Denklemler

Birinci Mertebeden ve Birinci Dereceden Difransiyel Denklemler

$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$

veya $\dfrac{dy}{dx} = y' = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$

Bu tip her denklemin kesin çözümü olmayabilir. Ama yaklaşık çözümü olabilir. Biz kesin çözülebilenleri ele alacağız.

1) Değişkenlerine ayrılabilen difransiyel denklemler
2) Homojen difransiyel denklemler
3) P ve Q'nun lineer olması durumundaki difransiyel denklemler
4) Homojen şekle getirilebilen difransiyel denklemler
5) Tam difransiyel denklemler
6) İntegral çarpanı bulunarak çözülebilen difransiyel denklemler
7) Lineer difransiyel denklemler
8) Bernoulli difransiyel denklemler
9) Riccati difransiyel denklemler

GIPTA

1) Değişkenlerine Ayrılabilen Difransiyel Denklemler

$$\underbrace{f_1(x)\cdot f_2(y)}_{P(x,y)}\,dx + \underbrace{g_1(x)\cdot g_2(y)}_{Q(x,y)}\,dy = 0$$

Çözüm için: $\dfrac{f_1}{g_1}dx + \dfrac{g_2}{f_2}dy = 0$

$$\underbrace{\int \frac{f_1}{g_1}dx}_{F(x)} + \underbrace{\int \frac{g_2}{f_2}dy}_{G(y)} = c$$

$$= F(x) + G(y) = c$$

genel çözüm (g.ç.)

Ör:

Eğer burada x olsa idi denklem değişkenlerine ayrılamazdı.

$$x(y^2-1)\,dx + e^{-x}y\,dy = 0$$

$$xe^x dx + \frac{y}{y^2-1}dy = 0$$

$$\int xe^x dx + \int \frac{y}{y^2-1}dy = c$$

$$xe^x - e^x + \frac{1}{2}\ln|y^2-1| = c$$

g.ç.

Ör:

$$\sin x\, y(y-1)dx = \cos x\, dy$$

$$\tan x\,dx = \frac{dy}{y(y-1)}$$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{dy}{y(y-1)}$$

$$\frac{1}{y(y-1)} \equiv \frac{a}{y} + \frac{b}{y-1}$$

$$\equiv (a+b)y - a \rightarrow a = -1$$

$$a+b=0 \qquad b=1$$

$$\tan x\,dx = -\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{y-1}$$

$$-\ln|\cos x| + c = -\ln|y| + \ln|y-1|$$

g.ç.

Bu sabiti istediğimiz yere yazabiliriz. Yanlız bir sabit olmak şartıyla

ÖR

$$\operatorname{sh}x\sqrt{1-y^2}\,dx = \operatorname{ch}x\,dy$$

$$\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}dx = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\int \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}dx = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

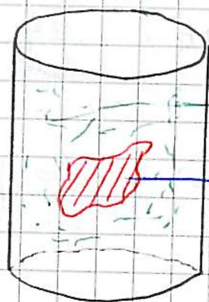
$$\int \frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}dx = \arcsin y$$

$$\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx = \arcsin y \quad , \quad e^x-e^{-x}=t$$
$$(e^x+e^{-x})\,dx = dt$$

$$\boxed{\ln|e^x+e^{-x}| = \arcsin y + c}$$ g.ç.

Bu grubo giren denklemler için modellemeler.

ÖR Newton'un soğuma-ısınma kanunu



$T(t), T, A, k>0$

A ortamın sıcaklığı

T cismin sıcaklığı

t → zaman

Newton'un bu kanunu sözlerle şöyle ifade edilir.
Bir cismin $T(t)$ sıcaklığının zamana göre değişimi T ve cismi çevreleyen ortamın A sıcaklığı farkla orantılıdır. Yani "k" orantı kat sayısı pozitif sabit olmak üzere.

$$\boxed{\frac{dT(t)}{dt} = -k\,(T(t)-A)}$$

Eğer $T>A$ ise $\frac{dT}{dt}<0$ olur. ve böylece sıcaklık (T)'nin azalan bir fonksiyonudur. Bu durumda cisim soğur. Eğer $T<A$ ise $\frac{dT}{dt}>0$ olursa bu durumda cisim ısınır.

ÖR Torricelli kanunu

Bu kanun bir tanktaki sıvının V hacminin değişeninin zamana oranının tanktaki sıvının y derinliğinin karekökü ile orantılı olduğunu ifade eder.

$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{y}$$

ÖR P(t) sabit β doğum ε ölüm oranlarına (Birim zamanda birey başına doğum ve ölüm oranları) sahip olan nüfustaki (insan, haşere, bakteri) bireylerin sayısıdır.

$$\frac{dP(t)}{dt} = \underbrace{(\beta-\varepsilon)}_{k}.P(t)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = k\,P(t)$$

Kısaca $\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x)}{f(y)}$

Ödev: 2

1) $x(y^2-1)dx - y(x^2-1)dy = 0$

2) $x^2y\,dy - dx = x^2dx$

3) $(x^2-x)\,y' = y^2+y$

4) $xy' + y^2 = 1$

5) $(1+y)y' = x^2(1-y)$

6) $y' + (1-y^2)\tan x = 0$

7) $y(1-x)dx + x^2(1-y)dy = 0$

8) $(1+y)\,y' = xy$

Ödev: 2/6'nın çözümü

$y' + (1-y^2)\tan x = 0$

$\frac{dy}{dx} + (1-y^2)\tan x = 0$

$\frac{dy}{1-y^2} + \tan x\,dx = 0$

$\int \frac{dy}{1-y^2} + \int \tan x\,dx = 0$

$-\int \frac{dy}{y^2-1} + \int \tan x\,dx = c$

$$-\frac{1}{2}\ln|y^2-1| - \ln|\cos x| = c$$

g.a.

2) Homojen Difransiyel Denklemler

$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

$f(x,y)$ için $\left.\begin{matrix} x \to tx \\ y \to ty \end{matrix}\right)$ yazıldığında

$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ böyle bir durum oluyorsa

$n \in \mathbb{N}$ (Doğal sayı) f, x, n'inci dereceden homojen denklem

Buna göre $y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ difransiyel denkleminde P ve Q aynı dereceden homojen iseler difransiyel denkleme o dereceden homojen denklem denir.

Çözüm Metodu:

$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ homojen ise P ve Q denkleminin homojenlik derecesindeki x ile bağımsız değişkenlerine bölünür. Bu işlem neticesinde $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(1,\frac{y}{x})}{Q(1,\frac{y}{x})} = k(1,\frac{y}{x})$ ile gösterilir.

$\frac{y}{x} = u(x)$, $u(x)$ bulunacak

$y = u \cdot x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot x + u$ için

$\frac{du}{dx} \cdot x + u = k(1,u)$ olur.

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \underbrace{k(1,u) - u}_{R(u)\text{ diyelim}}$$

$$\frac{du}{R(u)} = \frac{dx}{x}$$

$$\underbrace{\int \frac{du}{R(u)}}_{m(u) \text{ olsun}} = \ln|x| + c$$

$$m(u) = \ln|x| + c$$

$$\boxed{m\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + c} \quad \text{g.ç.}$$

ÖR $f(x,y) = x^2 + y - 1$ Fonksiyon homojen değildir.

ÖR $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ 2. dereceden homojen

ÖR $f(x,y) = x^3 - y^3 + x^2y$ 3. dereceden homojen

29/09/2010

ÖR $y' = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 2. dereceden homojen dif. denklem

$$y' = \frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}, \quad \frac{y}{x} = u \quad y = ux \quad y' = u'x + u$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x + u = \frac{u}{1+u^2} \Rightarrow \frac{du}{dx} x = \frac{u}{u^2+1} - u = \frac{u - u^3 - u}{u^2+1} = \frac{-u^3}{u^2+1}$$

$$= \frac{u^2+1}{u^3} du = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{u^2+1}{u^3} du = -\ln|x| + c$$

$$\int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{u^3} = -\ln|x| + c$$

$$\ln|u| - \frac{1}{2} \frac{1}{u^2} = -\ln|x| + c$$

$$\boxed{\ln\left|\frac{y}{x}\right| - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{y^2} = -\ln|x| + c} \quad \text{g.ç.}$$

ÖR $y' = \frac{x-y}{x+y}$

$y' = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$, $\frac{y}{x} = u$ $y' = u'x + u$

$u'x + u = \frac{1-u}{1+u}$ $= \frac{du}{dx} x = \frac{1-u}{u+1} - u$

$= \frac{1-u-u^2-u}{u+1} = -\frac{u^2+2u-1}{u+1}$

$= \frac{u+1}{u^2+2u-1} du = -\frac{dx}{x}$

$\int \frac{u+1}{u^2+2u-1} du = -\ln|x| + c$

$\frac{1}{2} \ln|u^2+2u-1| = -\ln|x| + c$

$$\boxed{\frac{1}{2} \ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x} - 1\right| = -\ln|x| + c}$$ g.ç.

ÖR $y' = \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}$, $\frac{y}{x} = u$ $y' = u'x + u$

$\frac{du}{dx} x + u = \cos u + u$

$\frac{du}{\cos u} = \frac{dx}{x}$

$\int \frac{du}{\cos u} = \ln|x| + c$

$\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \ln|x| + c$

$\tan\frac{x}{2} = t$

$x = 2\arctan t.$

$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

GIPTA

$$\Rightarrow 2\int \frac{dt}{1-t^2} = -2\int \frac{dt}{t^2-1} = \ln|x| + c$$

$$\Rightarrow -\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = \ln|x| + c$$

$$\Rightarrow -\ln\left|\frac{\tan\frac{u}{2}-1}{\tan\frac{u}{2}+1}\right| = \ln|x| + c$$

$$\Rightarrow \boxed{-\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{y}{2x}\right)-1}{\tan\left(\frac{y}{2x}\right)+1}\right| = \ln|x| + c}$$

g.g.

(*) ÖR

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}} + \frac{y}{x}$$

$$y' = \frac{y}{x\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}} + \frac{y}{x}$$

$$= \frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}} + \frac{y}{x}, \qquad \frac{y}{x} = u \qquad u' = u'x + u$$

$$\Rightarrow u'x + u = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} + u \qquad = \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}du = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}du = \ln|x| + c$$

$u = \sin t$
$du = \cos t\, dt$

$$\int \frac{\cos t}{\sin t}\cdot \cos t\, dt = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}dt = \ln|x| + c$$

devamını getir

ÖDEV: 3

1) $y' = \frac{x^2-2y^2}{3xy}$

2) $(3x^2+4xy)dx + (2x^2+3y^2)dy=0$

3) $y' = \frac{x^2+y^2}{2x^2}$

4) $y' = \frac{x^2-y^2}{xy}$

5) $(2x-y)dy = (2y-x)dx$

6) $(x^2-y^2)y' = xy$

7) $xy' = y - x\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$

8) $xy' = y + (\sin x)\left(\frac{y}{x}\right)$?

9) $x(x+y)dy = (x^2+y^2)dx$

10) $x^2y' = 4y^2 + xy - 3x^2$

11) $xy' = y\sqrt{1-\frac{y}{x}}$

12) $xy' - y = 2\sqrt{y^2-x^2}$

13) $y' = \frac{y}{x+y}$

14) $y' = \frac{x}{x-y}$

15) $xy' = y + \sqrt{x^2-y^2}$

GIPTA

3) P ve Q'nun Lineer Olması Durumundaki Difransiyel Denklemler

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

$$y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$$

Bu özellikte iki durum söz konusudur.

1) $ab_1 - a_1b = 0$ olabilir. Bu durumda pay ve paydayı temsil eden doğrular paraleldir.

Yani $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = k$ veya $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = k$ $\quad k \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

$a = k.a_1$
$b = k.b_1$ için $ax+by = k(a_1x+b_1y)$

Çözüm için:

$$a_1x + b_1y = u = u(x)$$

$$a_1 + b_1y' = u'$$

$$y' = \frac{u'-a_1}{b_1} \quad \text{ve} \quad y' = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1} \quad du$$

$$\Rightarrow \frac{u'-a_1}{b_1} = \frac{ku+c}{u+c_1} = u' = b_1\left(\frac{ku+c}{u+c_1}\right) + a_1 \rightarrow F(u) \text{ diyelim}$$

$$\frac{du}{dx} = F(u) \Rightarrow \frac{du}{F(u)} = dx$$

$$\underbrace{\int \frac{du}{F(u)}}_{H(u)} = x + c \qquad H(u) = x + c$$

$$\boxed{H(a_1x + b_1y) = x + c}$$

g.ç.

18

Ör $y' = \frac{2x+2y-1}{x+y+1}$

$y' = \frac{2(x+y)-1}{x+y+1}$, $x+y=u$
$1+y'=u'$ $y'=u'-1$

$\Rightarrow u'-1 = \frac{2u-1}{u+1}$

$\frac{du}{dx} = \frac{2u-1}{u+1} = \frac{2u-1+u+1}{u+1} = \frac{du}{dx} = \frac{3u}{u+1}$

$\frac{u+1}{3u} du = dx$

$\int \frac{u+1}{3u} du = x+c$

$\frac{1}{3}\int du + \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = x+c$

$\frac{1}{3}u + \frac{1}{3}\ln|u| = x+c$

$$\boxed{\frac{1}{3}(x+y) + \frac{1}{3}\ln|x+y| = x+c}$$

g.g.

Ör $y' = \frac{x-y}{3x-3y+1}$

$y' = \frac{x-y}{3(x-y)+1}$, $x-y=u$
$1-y'=u'$ $y'=u'+1$

$1-u' = \frac{u}{3u+1}$ $u' = 1 - \frac{u}{3u+1}$

$= \frac{3u+1-u}{3u+1} = \frac{2u+1}{3u+1} = \frac{du}{dx}$

$= \frac{3u+1}{2u+1} du = dx$

$$\int \frac{3u+1}{2u+1}\,du = x + c \quad , \quad \left(\begin{array}{r|l} 3u+1 & 2u+1 \\ -3u+\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \hline -\frac{1}{2} & \end{array} \right)$$

$$\frac{3}{2}\int du - \frac{1}{2}\int \frac{du}{2u+1} = x + c$$

$$\frac{3}{2}u - \frac{1}{4}\ln|2u+1| = x + c$$

Sor

$$\boxed{\frac{3}{2}(x-y) - \frac{1}{4}\ln|2(x-y)+1| = x + c}$$

g.ç.

2) $ab_1 - a_1b \neq 0$ ise (homojen şekle getirilebilen denklemlere)

$$y' = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1} \quad \text{bu durumda}$$

Çözüm için:

$$\left. \begin{array}{l} x = X + h \\ y = Y + k \end{array} \right) \; h,k \in \mathbb{R}$$ bulunacaklar dönüşümü uygulanır.

$$\left. \begin{array}{l} dx = dX \\ dy = dY \end{array} \right) \; y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

1. Dereceden Homojen denk.

$$y' = \frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY + ah + bk + c}{a_1X + b_1Y + a_1h + b_1k + c_1}$$

($ah + bk + c = 0$, $a_1h + b_1k + c_1 = 0$) olacak şekilde h, k bulunsa

$$\left.\begin{aligned} ah + bk + c &= 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} h &= m \\ k &= n \end{aligned} \quad m, n \in R \quad \text{olsunlar}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= X + h \\ y &= Y + k \end{aligned}\right) \text{'dan} \quad \left.\begin{aligned} X &= x - h \\ Y &= y - k \end{aligned}\right) \text{'dır.}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY}{a_1X + b_1Y} \quad \text{Homojendir.}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a + b\left(\frac{Y}{X}\right)}{a_1 + b\left(\frac{Y}{X}\right)}, \quad \frac{Y}{X} = u = u(X)$$

Çözüm: $F(X, Y, c) = 0$ olsun

veya $F(x - m, y - n, c) = 0$ g.ç.

Ör $$y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= X + h \\ y &= Y + k \end{aligned}\right) \rightarrow y' = \frac{dY}{dX}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y + h - k + 1}{X + Y + h + k - 3}, \quad \begin{aligned} h - k + 1 &= 0 \\ h + k - 3 &= 0 \end{aligned}$$

$$h = 1, \quad k = 2$$

$$\begin{aligned} x &= X + 1 \\ y &= Y + 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} X &= x - 1 \\ Y &= y - 2 \end{aligned}$$

Homojen

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y} = \frac{1-\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}, \quad \frac{Y}{X} = u \quad \frac{dY}{dX} = \frac{du}{dX}X + u$$

$$\frac{du}{dX} \cdot X + u = \frac{1-u}{1+u}$$

$$\frac{du}{dX} X = \frac{1-u}{u+1} - u = \frac{1-u-u^2-u}{u+1}$$

$$= \frac{u^2+2u-1}{u+1} = \frac{(u+1)\,du}{u^2+2u-1} = -\frac{dX}{X}$$

$$\int \frac{u+1}{u^2+2u-1}\,du = -\ln|x| + c$$

$$\frac{1}{2}\ln|u^2+2u-1| = -\ln|x| + c$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{Y}{X}\right)^2 + 2\left(\frac{Y}{X}\right) - 1\right| = -\ln|x| + c$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{y-2}{x-1}\right)^2 + 2\left(\frac{y-2}{x-1}\right) - 1\right| = -\ln|x-1| + c}$$

ÖDEV: 4

1) $y' = \frac{x+y-1}{2x+2y+3}$

2) $y' = \frac{-x+y+1}{x+y+5}$

3) $(x+2y)(dx-dy) = dx+dy$

4) $y' = \frac{2x+y-1}{4x+2y+7}$

5) $y' = \frac{2x-y}{4x-2y-1}$

6) $(2x-4y+5)y' + x + 2y + 3 = 0$

7) $(x-y+1)dx + (2x+y-2)dy = 0$

30/09/2010

5) Tam Difransiyel Denklemler

$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$

Teorem: Böyle bir denklemin tam olabilmesi için gerekli ve yeter şart,

$P_y = Q_x$ olması lazım.

Ör: $\underbrace{(y-\cos x)}_{P}\,dx + \underbrace{(x+e^y)}_{Q}\,dy = 0$

$P_y = 1 = Q_x$ (Denklem Tam)

Ör: $\underbrace{(y^2+\sin x)}_{P}\,dx + \underbrace{(x^2-e^y)}_{Q}\,dy = 0$

$P_y = 2y \neq 2x = Q_x$ (Denklem Tam Değil)

Ör: $\underbrace{(y+\sqrt{x})}_{P}\,dx - (\cos y - x)\,dy = 0$

$Q = +(x-\cos y)$

$P_y = 1 = Q_x$ (Denklem Tam)

GIPTA

ÖR $(x-y)dx+(-x+y)dy=0$ (Tam ve Homojen Dif. Denklem)

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ Tam olsun.

$u(x,y)=c \rightarrow d(u)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=d(c)=0$ (Tam Dif. Denklem)

Çözüm için: $u(x,y)=\underbrace{\int^x P(x,y)dx}_{F(x,y) \text{ alalım}}+h(y)$

$u(x,y)=F(x,y)+h(y)$

$u_y=F_y+h'(y)=Q$

$h(y)=\ldots\ldots$ bulunur.

$\Longrightarrow u(x,y)=\boxed{F(x,y)+\ldots\ldots=c}$ g.ç.

ÖR $(y+xe^x)dx+(x+\sqrt{y})dy=0$ (Denklem tamdır)

$u(x,y)=\int^x(y+xe^x)dy+h(y)$

$u(x,y)=\int^x(y+xe^x)dx+h(y)$

$u=xy+xe^x-e^x+h(y)$

$u_y=x+h'(y)=x+\sqrt{y}=Q$

$h'(y)=\sqrt{y} \Rightarrow h(y)=\frac{2}{3}\cdot y^{\frac{3}{2}}$ integral

$$\boxed{u=xy+xe^x-e^x+\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=C}$$ g.ç.

$\int xe^x dx$ Kısmi integralden çözülür.

Ama e^x için geçerli bir kısa yol.

xe^x-e^x önce kendisi − sonra türevi

Ör

$$(y+\tan x)\,dx + \left(y + \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\right)dy = 0$$ (Denklem tamdır)

$u = \int (y+\tan x)\,dx + h(y)$

$u = xy - \ln|\cos x| + h(y)$

$u_y = x + h'(y) = x + \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} = Q$

$h'(y) = \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} \longrightarrow h(y) = \int \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\,dy \,,$ $\quad y^2-1 = t$

$\frac{dh}{dy}$ $\quad\quad y\,dy = \frac{dt}{2}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \sqrt{t} = \sqrt{y^2-1}$

$\Rightarrow u(x,y) = \boxed{xy - \ln|\cos x| + \sqrt{y^2-1} = c}$ g.ç.

$h'(y) = 0$ ise $h(y) = c$ $\quad\quad u(x,y) = F(x,y) + c = C$ $F(x,y) = C - c = c$

Ör

$$(x-y)\,dx + (y-x)\,dy = 0$$ (Tam ve Homojen Dif. Denklem)

Tam Durumda Çözüm:

$u \int (x-y)\,dx + h(y)$

$u \;\frac{x^2}{2} - xy + h(y)$

$u_y = -x + h'(y) = y - x = Q$

GIPTA

$h'(y) = y \rightarrow h(y) = \frac{y^2}{2}$

$f(x,y) = \boxed{\frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^2}{2} = c}$ g.ç.

Homojen Durumda çözüm

$(x-y)dx = -(x-y)dx$

$= (x-y)dy \rightarrow y' = 1$

$\boxed{y = x + c}$ g.ç.

ÖR $(y+x)dx + (x-2y)dy = 0$ (Tam ve Homojen Dif. Denklem)

Tam için çözüm:

$u = \int (y+x)dx + h(y)$

$u = xy + \frac{x^2}{2} + h(y)$

$u_y = x + h'(y) = x - 2y = 0$

$h(y) = -y^2$

$\Rightarrow u(x,y) = \boxed{xy + \frac{x^2}{2} - y^2 = c}$ g.ç.

Homojen için çözüm:

$y' = -\frac{x+y}{x-2y} = \frac{x+y}{-x+2y}$ Homojen

$= \frac{1+\frac{y}{x}}{-1+2\frac{y}{x}}$, $\frac{y}{x} = u$ $y' = u'x + u$

$u'x + u = \frac{1+u}{-1+2u}$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{u+1}{2u-1} - u$$

$$= \frac{u+1-2u^2+u}{2u-1}$$

$$= \frac{2u^2+2u+1}{2u-1} = -\frac{2u-2u-1}{2u-1}$$

$$\frac{2u-1}{2u^2-2u-1}du = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{2u-1}{2u^2-2u-1}du = -\ln|x|+c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2u-1}{u^2-u}du = -\ln|x|+c$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|u^2-u-\frac{1}{2}\right| = -\ln|x|+c$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\right| = -\ln|x|+c}$$ g.ç.

6) integral çarpanı Bulunarak Çözülebilen Difransiyel Denklemler.

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ (Tam olmasın)

$\lambda(x)$, $\lambda(y)$, $\lambda(x.y)$, $\lambda\left(\frac{y}{x}\right)$ yapısında (şeklinde) ifadelerle (fonksiyonlarla) çarpabiliriz ki denklem bu durumda tam olur. işte bu durumda olan fonksiyonlara integral çarpanı denir.

GIPTA

1) Eğer $\frac{P_y - Q_x}{Q} = f(x)$ şeklinde sadece x'in fonksiyonu ise bu oran buradan işlem

$\lambda(x) = \lambda = e^{\int f(x)dx}$ ile şeklinde

bulacağımız ifade ile denklemi çarparsak denklem tam olur.

Ör: $\underbrace{(1-xy)}_{P}dx + \underbrace{(xy-x^2)}_{Q}dy = 0$

$P_y = -x \neq y - 2x = Q_x$ (Denklem Tam Değil)

$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{-x-y+2x}{xy-x^2} = \frac{x-y}{-x(x-y)} = -\frac{1}{x}$

$f(x) \rightarrow \lambda(x) = e^{-\int \frac{1}{x}dx}$

$= e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$ için

$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{x} - y\right)}_{P}dx + \underbrace{(y-x)}_{Q}dy = 0$

$P_y = -1 = Q_x$ (Denklem Tam)

$u = \int\left(\frac{1}{x} - y\right)dx + h(y)$

$u = \ln|x| - xy + h(y)$

$u_y = -x + h'(y) = y - x = Q$

$h'(y) = y \rightarrow h(y) = \frac{y^2}{2}$

$u(x,y) = \ln|x| - xy + \frac{y^2}{2} = c$ g.ç.

Ör: $(3x^2+y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$ (Homojen Dif. Denklem)

$P = 3x^2+y^2$, $Q = -2xy$

$P_y = 2y \neq -2y = Q_x$ (Denklem Tam Değil)

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{2y+2y}{-2xy} = -\frac{2}{x} \rightarrow \lambda(x)$$

$$= e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(3+\frac{y^2}{x^2}\right)dx - 2\frac{y}{x}\,dy = 0 \quad \text{(Denklem Tam)}$$

$$u = \int \left(3+\frac{y^2}{x^2}\right)dx + h(y)$$

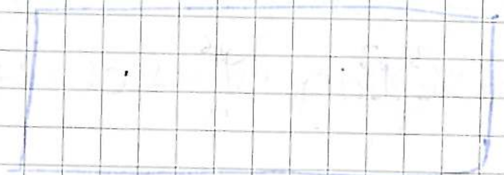
$$u = 3x - \frac{y^2}{x} + h(y)$$

$$u_y = -\frac{2y}{x} + h'(y) = -2\frac{y}{x} = Q$$

$$h'(y) = 0 \longrightarrow h(y) = c$$

$$\boxed{3x - \frac{y^2}{x} = c}$$

g.4



2) Eğer $\frac{P_y - Q_x}{-P} = g(y)$ ise, Bu durumda

$d(y) = d = e^{\int g(y)dy}$ şeklinde bir ifade ile denklem uyarlanırsa denklem tam olur.

Ör: $x^2 y\,dx + (x^3 + 2y^3)\,dy = 0$ (Denklem Tam Değil Ama Homojen)

$$\frac{P_y - Q_x}{-P} = \frac{x^2 - 3x^2}{-x^2 y} = \frac{2}{y} \rightarrow g(y)$$

$$d = d(y) = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{2\ln y} = y^2 \text{ için}$$

$x^2 y^3\,dx + (x^3 y^2 + 2y^5)\,dy = 0$ (Denklem Tamdır)

$$u = \int x^2 y^3\,dx + h(y)$$

$$u = \frac{x^3 y^3}{3} + h(y)$$

$$u_y = x^3 y^2 + h'(y) = x^3 y^2 + 2y^5 = Q$$

$$h'(y) = 2y^5 \rightarrow h(y) = \frac{y^6}{3}$$

$$\boxed{\frac{x^3 y^3}{3} + \frac{y^6}{3} = C}$$

g.ç.

Ödev 5:

Aşağıdaki denklemlerin tam olanlarını tam olmayıpta tam şekle getirilebilenleri veya başka tiplere uyuyorsa o duruma göre çözünüz.

1) $(x^2-y^2)dx - 2xy\,dy = 0$
2) $(x^2+2xy-y^2)dx = (x^2-2xy-y^2)dy$
3) $(2xy+e^x)dx + (x^2-1)dy = 0$
4) $(y+3x)dx + xdy = 0$
5) $ye^x dx + e^x dy = 0$
6) $(5xy^4+x)dx + (2+3y^2-10x^2y^3)dy = 0$
7) $xy^3 dx + (x^2y^2-1)dy = 0$
8) $(x^2+y^2+x)dx + xy\,dy = 0$
9) $(xy^3-1)dx + xy^2 dy = 0$
10) $-xy' + y + \ln x = 0$
11) $(x^2y+y^2)dx - x^3 dy = 0$
12) $2y\,dx + (1-\ln y-2x)dy = 0$
13) $(2xy^4 e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$
14) $(2x^3y^2+4x^2y+2xy^2+xy^4+2y)dx + 2(y^3+x^2y+x)dy = 0$
15) $(2y-3x)dx + xdy = 0$
16) $(x-y^2)dx + 2xy\,dy = 0$
17) $ydx - xdy + \ln x\,dx = 0$

7) Lineer Difransiyel Denklemler

A'ya böl
yanlız bırak

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0$$

$$y' + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A} = 0$$

$$y' + \frac{B}{A}y = -\frac{C}{A}$$

$P(x)$ $Q(x)$

$$y' + P(x)y = q(x)$$

Çözüm için: $\lambda(x) = e^{\int P(x)dx}$

$$\lambda y = \int \lambda q(x)\,dx + c$$

g.4.

06/10/2010

ÖDEV 6:

1) $2y^2dx + (2x+3xy)dy = 0$

2) $(2xy^3+y^4)dx + (xy^3-2)dy = 0$

3) $(3x^2y^{-1}+y)dx + (2x+4y^2)dy = 0$

4) $(2x+\tan y)dx + (x-x^2\tan y)dy = 0$

5) $(y^2(x+1)+y)dx + (2xy+1)dy = 0$

6) $(2xy^2+y)dx + (2y^3-x)dy = 0$

7) $(2y^2+2x+1)dx + 2ydy = 0$

8) $2xdx + (6ye^y-x^2)dy = 0$

9) $3x^2ydx + (3x^3+5y^2)dy = 0$

10) $(3x^2y+2xy^{-2})dx + (3x^3+2y^{-1})dy = 0$

Lineer Difransiyel Denklemlerin Devamı

$y' + p(x)y = q(x)$

Çözüm için:

$\lambda = e^{\int p(x)dx} = \lambda(x)$

$\lambda y = \int \lambda . q(x) dx + c$

g.ç.

34

ÖR

$$xy' - y - x^3 = 0$$

$$y' - \frac{1}{x} y = x^2$$

$$\lambda = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} y = \int \frac{1}{x} x^2 dx + c$$

$$\boxed{\frac{y}{x} = \frac{x^2}{2} + c}$$ g.ç.

ÖR

$$-xy' + y = x^3 e^x$$

$$y' - \frac{1}{x} y = x^2 e^x$$

$$\lambda = e^{-\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} y = \int \frac{1}{x} x^2 e^x dx + c$$

$$\frac{y}{x} = \int x e^x dx + c$$

$$\boxed{\frac{y}{x} = xe^x - e^x + c}$$ g.ç.

ÖR

$$\cos x y' + 2y \sin x = \cos^3 x$$

$$y' + 2y \tan x = \cos^2 x$$

$$\lambda = e^{\int 2 \tan x dx} = e^{-2 \ln \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\boxed{e^{\ln f(x)} = f(x)}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} y = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cos^2 x dx + c$$

$$\boxed{\frac{y}{\cos^2 x} = x + c}$$ g.ç.

ÖDEV 7:

1) $xy' - 4y = x^5$
2) $y' + \frac{y}{x} = x$
3) $xy' - 1(x+1)y = x^2 - x^3$
4) $xy' - y = x^3 + 1$
5) $(1-x^2)y' - y = 1 - y^2$
6) $x^2y' + y = 3x$
7) $(x^2-1)y' - xy = x^2$
8) $(1+x^2)y' + 2xy = \tan x$
9) $xy' + 2y - \sin x = 0$
10) $xy' - y = \frac{x^2(1-\cos x)}{\sin x + \cos x}$
11) $y' - \frac{1}{x}y = \frac{\cos x}{x} + \sin x$
12) $xy' - y = \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}$

8) Bernoulli Difransiyel Denklemi

$A(x)y' + B(x)y + C(x)y^n = 0, \ (n \in \mathbb{Q})$

$y' + p(x)y = q(x)y^n$

Çözüm için: Denklemin 2 yanı y^n ile bölünür.

$\frac{y'}{y^n} + P(x)\frac{1}{y^{n-1}} = q(x), \qquad u(x) = u\ \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}$

$u' = (1-n)y'y^{1-n-1}$

$u' = (1-n)\frac{y'}{y^n}$

$\Rightarrow \frac{y'}{y^n} = \frac{u'}{1-n}$

$$\Rightarrow \frac{u'}{1-n} + p(x)u = q(x)$$

$$u' + (1-n)\,p(x)u = (1-n)\,q(x) \quad \text{(Lineer)}$$

↳ Çözülür $\Rightarrow F(x,u,c)=0$

$$\boxed{F(x, y^{1-n}, c) = 0}$$ g.ç.

ÖR $-y' + xy = y^3 e^{-x^2}$

$$\frac{-y'}{y^3} + x\frac{1}{y^2} = e^{-x^2}, \qquad u = \frac{1}{y^2} = y^{-2}$$

$$u' = -2y'y^{-3}$$

$$= -2\frac{y'}{y^3}$$

$$-\frac{y'}{y^3} = \frac{u'}{2}$$

$$\frac{u'}{2} + xu = e^{-x^2}$$

$$u' + 2xu = 2e^{-x^2} \quad \text{(Lineer)}$$

$$\lambda = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2} \qquad e^{x^2}.u = \frac{e^{x^2}}{y^2} = 2\int e^{x^2}.e^{-x^2}\,dx + c$$

$$\boxed{\frac{e^{x^2}}{y^2} = 2x + c}$$ g.ç.

ör $xy' + y = y^2 \ln x$

$x\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = \ln x$, $u = \frac{1}{y}$

$u' = -\frac{y'}{y^2}$

$\frac{y'}{y^2} = -u'$

$-xu' + u = \ln x$

$u' - \frac{1}{x}u = -\frac{\ln x}{x}$ (Lineer)

$\lambda = e^{-\int\frac{dx}{x}} = e^{-\ln x}$

$= \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x}u = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y} = -\int -\ln x\frac{dx}{x^2} + c$

$u = \ln x$

$du = \frac{dx}{x}$

$dv = \frac{dx}{x^2}$

$v = -\frac{1}{x}$

$\frac{1}{xy} = -\left(-\frac{\ln x}{x} + \int\frac{dx}{x^2}\right) + c$

$\frac{1}{xy} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + c$

9.4

ör $y'\cos x + y\sin x + y^3 = 0$

$\frac{y'}{y^3}\cos x + \frac{1}{y^2}\sin x = -1$, $u = \frac{1}{y^2} = y^{-2}$

$u' = -2y'y^{-3}$

$u' = -2\frac{y'}{y^3} \rightarrow \frac{y'}{y^3} = -\frac{u'}{2}$

38

$-\frac{u'}{2}\cos x + u\sin x = -1$

$u' - 2\tan x\, u = \frac{2}{\cos x}$ (Lineer)

$\lambda = e^{-\int 2\tan x\, dx} = e^{2\ln\cos x} = \cos^2 x \Rightarrow u\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{y^2} =$

$= 2\int \cancelto{\cos x}{\cos^2 x} \frac{1}{\cancel{\cos x}}\, dx + C$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\cos^2 x}{y^2} = 2\sin x + C}$$ g.ç.

"OR"

$y' + 2y = 2xy^{3/2}$

$\frac{y'}{y^{3/2}} + 2\frac{1}{y^{1/2}} = 2x$, $u = \frac{1}{y^{1/2}} = y^{-1/2}$

$u' = -\frac{1}{2}y'y^{-3/2}$

$u' = -\frac{1}{2}\frac{y'}{y^{3/2}}$

$\frac{y'}{y^{3/2}} = -2u'$

$\Rightarrow 2u' + 2u = 2x$

$\Rightarrow u' - u = -x$ (Lineer)

$\lambda = e^{-\int dx} = e^{-x}$

$e^{-x}u = \frac{e^{-x}}{\sqrt{y}} = -\int xe^{-x}dx + C$, $u = x$

$du = dx$

$dv = e^{-x}dx$

$v = -e^{x}$

$$\frac{e^{-x}}{\sqrt{y}} = -\left(-x e^{-x} + \int e^{-x} dx\right) + c$$

$$\boxed{\frac{e^{-x}}{\sqrt{y}} = x e^{-x} + e^{-x} + c}$$ g.4.

ÖDEV 8:

1) $2y' + y = y^3(x-1)$
2) $x^3 y' = 2x^2 y + y^3$
3) $xy' + y = xy^3$
4) $y' + y = \sqrt{y}$
5) $3xy' - 2y = xy^4$
6) $2xy' - y = 2x^3 y^5$

9) Riccati Difransiyel Denklemleri

$$A(x)y' + B(x)y^2 + C(x)y + D(x) = 0$$

$$y' + p(x)y^2 + q(x)y + r(x) = 0$$

Çözüm için: $y_1 = y_1(x)$ özel çözüm olsun

$y = y_1 - \frac{1}{u}$, $u = u(x)$
$y' = \ldots$
$y^2 = \ldots$

ve $y' + p(x)y^2 + Q(x)y + r(x) = 0$

yerine yazılacak denklem düzenlenirse karşımıza bir lineer denklem çıkar. Bu da çözülür.

Çözüm $F(x, u, c) = 0$ arasındadır. $\boxed{F\left(x, \frac{1}{y - y_1}, c\right) = 0}$ g.4.

40

ör. $2x^2y' = (x-1)(y^2-x^2)+2xy$

$y_1 = x$ özel çözüm

$y = x + \frac{1}{u}$

$y' = 1 - \frac{u'}{u^2}$

$y^2 = x^2 + \frac{2x}{u} + \frac{1}{u^2}$

$\Rightarrow 2x^2\left(1-\frac{u'}{u^2}\right) = (x-1)\left(x^2+\frac{2x}{y}+\frac{1}{u^2}-x^2\right)+2x\left(x+\frac{1}{u}\right)$

$= 2x^2u^2 - 2x^2u' = 2x^2u + x - 2xu - 1 + 2x^2u^2 + 2xu$

$= -2x^2u' - 2x^2u = x-1$

$u' + u = -\frac{1}{2}\frac{(x-1)}{x^2}$

$u' + u = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)$ (Lineer)

$\lambda = e^{\int dx} = e^x$

$e^x u = \frac{1}{2}\left(\int \frac{e^x dx}{x^2} - \int \frac{e^x dx}{x}\right) + c$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x dx}{x} - \int \frac{e^x dx}{x}\right) + c$

$\int \frac{e^{kx}}{x^n}dx, \int \frac{\sin x}{x^n}\cos x\, dx$

Elemanter Alınamaz

$\Rightarrow \frac{e^x}{y-x} = -\frac{e^x}{2x} + c$ g.ç.

$u = e^x$

$du = e^x dx$

$dv = \frac{dx}{x^2}$

$v = -\frac{1}{x}$

GIPTA

ÖDEV 9:

$$y' = y^2 + y\sin 2x - 2\sin^2 x + 1 \quad , \quad y = \tan x$$

– $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ Denklem grubunda olupta gördüğümüz tiplere uymayan fakat bir değişken dönüşümü veya değişkenler arasında rol değişikliği yaparak çözebilme metodu –

Bu durumda denklemde öyle bir yere öyle bir yeni bağımlı değişken denir ki denklem bilinen tiplere uyar. Veya değişkenler arasında rol değişikliği yaparak denklem gördüğümüz tiplere uyar. Bu durumda çözümü buluruz.

ÖR

$$dx + (x+y)\,dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x+y} \quad , \quad x+y = u$$

$$1 + y' = u' \rightarrow y' = u' - 1$$

$$\begin{array}{r|l} u & u-1 \\ -u+1 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$u' - 1 = -\frac{1}{u}$$

$$\frac{du}{dx} = 1 - \frac{1}{u} = \frac{u-1}{u}$$

$$\frac{u\,du}{u-1} = dx$$

$$\int \frac{u\,du}{u-1} = x + c$$

$$u + \ln|u-1| = x + c$$

$$\boxed{x + y + \ln|x+y-1| = x + c}$$

1.
9.4

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x+y}$$

$$\frac{dx}{dy} = -(x+y)$$

$$\frac{dx}{dy} + x = -y \quad \text{(Lineer)}, \quad y' + p(x)y = q(x) \leftrightarrow x' + p_1(y)x = q_1(y) \text{ (Lineer)}$$

$$x = x(y)$$

$$\lambda = e^{\int dy} = e^{y}$$

$$e^{y} \cdot x = -\int y e^{y} dy + C$$

$$\boxed{e^{y} \cdot x = -(y e^{y} - e^{y}) + C}$$ 2. g.ç.

1. ile 2. g.ç.'ler farklı görünselerde aynı eğri ailesine aittirler.

07/10/2010

ÖR $y'\cos y + \dfrac{\sin y}{x} = 1$

$u = \sin y$
$u' = y'\cos y$

$\Rightarrow u' + \dfrac{u}{x} = 1$ (Lineer)

$\lambda = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$

$xu = x\sin y = \int x\,dx + c$

$$\boxed{x\sin y = \frac{x^2}{2} + c}$$

g.g.

ÖR $y' + \dfrac{2}{x}(1+y) = x\sqrt{1+y}$

$u = 1+y$
$u' = y'$

$u' + \dfrac{2}{x}u = x\sqrt{u}$ (Bernoulli)

$\dfrac{u'}{\sqrt{u}} + \dfrac{2}{x}\sqrt{u} = x$, $v = \sqrt{u}$

$v' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$\dfrac{u'}{\sqrt{u}} = 2v'$

$2v' + \dfrac{2}{x}v = x$

$v' + \dfrac{1}{x}v = \dfrac{x}{2}$ (Lineer)

$\lambda = e^{\int \frac{dx}{x}} = x$

$xv = x\sqrt{u} = x\sqrt{1+y} = \dfrac{1}{2}\int x x\,dx + c$

$$\boxed{x\sqrt{1+y} = \frac{x^3}{6} + c}$$

g.g.

Ör: $\sqrt{x}\,\sin^2(x^2-y) = 2x - y'$

$u = x^2 - y$, $u' = 2x - y'$) $\sqrt{x}\,\sin^2 u = u' = \frac{du}{dx}$

$\frac{du}{\sin^2 u} = \sqrt{x}\,dx$

$-\text{cotan}\,u = -\text{cotan}\,(x^2-y) = \frac{2}{3}x^{3/2} + c$ g.ç.

ÖDEV 10:

1) $y' = (x+4y-1)^2$
2) $(1+y')\cos(x+y)\,e^{x+y} = 1$
3) $(x-y')\ln\left(\frac{x^2}{2}-y\right) = \left(\frac{x^2}{2}-y\right)xe^x$
4) $y' = (y-4x)^2$
5) $\tan^2(x+y)\,dx - dy = 0$

Verilen İlk Şartlar Altında Çözüm Bulma veya Başlangıç Şartları Verildiğinde Çözüm Arama

Ör: $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$, $y(1) = 0$ (Bunun anlamı: $x=1$ için $y=0$ olan)

$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$, $\frac{y}{x} = u$ $y' = u'x + u$

$u'x + u = e^u + u$

$\frac{du}{dx}x = e^u \longrightarrow e^{-u}du = \frac{dx}{x}$

$= -e^{-u} = \ln|x| + c$

$-e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| + c$

$y(1) = 0$ olan $\rightarrow \underset{-1}{\underline{-e^{-\frac{0}{1}}}} = \underset{0}{\underline{\ln|1|}} + c$

$c = -1$ $-e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| - 1$

ÖR $\frac{dw}{dt} + w\tan t = \cos^2 t$, (Lineer), $w\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\lambda = e^{\int \tan t\, dt}$

$= e^{-\ln|\cos t|} = \frac{1}{\cos t}$

$\frac{w}{\cos t} = \int \frac{1}{\cos t} \cos^2 t\, dt + c$

$\boxed{\frac{w}{\cos t} = \sin t + c}$ g.ç.

$w(\pi/4) = 1$ olan

$\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \sin\frac{\pi}{4} + c$

$\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + c \quad \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = c \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = c \quad \boxed{\frac{w}{\cos t} = \sin t + \frac{1}{\sqrt{2}}}$

ÖR $y' + \frac{1}{2x} y = \frac{x}{y^3}$, $y(1) = 2$

$y' \cdot y^3 + \frac{1}{2x} y^4 = x$, $\quad u = y^4$

$u' = 4 y' y^3 \quad y' y^3 = \frac{u'}{4}$

$\frac{u'}{4} + \frac{u}{2x} = x$

$u' + \frac{2}{x} u = 4x$ (Lineer)

$\lambda = e^{2\int \frac{dx}{x}} = e^{2\ln x} = x^2$

$= x^2 u = x^2 y^4 = 4\int x \cdot x^2\, dx + c$

$\boxed{x^2 y^4 = x^4 + c}$ g.ç. $\quad y(1) = 2$ olan

$1.16 = 1 + c$

$c = 15$

$x^2 y^4 = x^4 + 15$

ÖDEV 11:

1) $y' = \frac{x-y}{x+y}$, $y(1)=2$

2) $y' = \frac{2xy - y^2}{2xy - x^2}$, $y(1)=2$

3) $y' = \frac{y^2 + xy}{x^2}$, $y(1)=1$

4) $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$, $y(0)=1$

5) $y' \tan y - \tan x = 0$, $y(0)=0$

6) $y' - 2y = 3e^{2x}$, $y(0)=0$

7) $xy' - 3y = x^3$, $y(1)=10$

8) $y' + 3y = 2xe^{-3x}$, $y(0)=1$

9) $xy' + 2y = 3x$, $y(1)=5$

10) $xy' + 5y = 7x^2$, $y(2)=5$

11) $y' + y = e^x$, $y(0)=1$

12) $(x^2+1)y' + 2xy = 1$, $y(0)=1$

13) $y' + \frac{2}{x} y = \frac{\cos x}{x^2}$, $y(\pi)=0$

Hızla Orantılı Direnç (Lineer Dif. Denklemler için)

Bazı durumlarda başka kuvvetlerin bulunmadığı varsayılarak durmaya hazırlanan bir araba gibi hareket eden cismin karşılaştığı direnç cismin hızı ile orantılıdır. Cisim ne kadar yavaş ilerlerse ileri doğru gidişi içinden geçtiği hava tarafından o kadar az engellenir. Bunu cismi bir koordinat ekseninde hareket

eden ve bir "t" anındaki konumu "s" ve hızı "v" olan bir m kütlesi şeklinde düşünerek matematiksel olarak ifade edebiliriz. Harekete karşı direnen kuvvet $F =$ Kütle x ivme (Newton Kanunu) $= m\left(\frac{dv}{dt}\right)$'dir.

$$F = m\frac{dv}{dt} = -kv \quad , (k>0)$$

(1)

Bu durumu söz konusu ederek kuvvetin hızla orantılı olarak azaldığını söyleyebiliriz. (1) ifadesini düzenlersek;

$m\frac{dv}{dt} + kv = 0$ olur. (Özel Lineer Deklem, Değişkenlerine Ayrılabilen Dif. Denklemler)

Cismin $t=0$, anındaki hızına, $V(0)=V_0$, diyelim ve bu şart altında çözüm $V=V(t)$ arayalım.

$$\frac{m\,dv}{dt} + kV = 0 \quad , \quad V(0) = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt$$

$$\ln V(t) = -\frac{k}{m}t + c$$

$$V(t) = e^{-\frac{k}{m}t + c} = e^{c} \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$\boxed{V(t) = e^{c} \cdot e^{-\frac{k}{m}t}} \quad \text{g.ç.}$$

$V(0) = V_0$ olan

$\Rightarrow V(0) = V_0 = e^{c} \cdot e^{0}$ ($e^0 = 1$)

$$V(0) = e^{c}$$

$$\boxed{V(t) = V_0 \cdot e^{-\frac{k}{m}t}}$$

Buradan m kütlesi büyük bir değer ise hızı sıfır'a ulaşmasının uzun süreceğini görürüz. Bu denklemi tekrar çözersek s'yi yani yol denklemini t'nin fonksiyonu olarak buluruz. Cismin durmaya hazırlandığını ve üzerine etki eden tek kuvvetin sürati ile orantılı bir direnç olduğunu varsayalım. Cisim durana kadar ne kadar yol alır.

Bunun için;

s(t) de S(0)=0 durumunda çözümü bulalım.

$$\frac{ds}{dt} = V(t) = V_0 \, e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$\rightarrow \frac{ds}{dt} = V_0 \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} \rightarrow ds = V_0 \, e^{-\frac{k}{m}t} \, dt$$

$$\boxed{s(t) = -\frac{m}{k} V_0 \, e^{-\frac{m}{k}t} + c}$$ g.ç.

s(0)=0 olan ;

$$s(0) = 0 = -\frac{m}{k} V_0 \cdot e^0 + c$$

$$\boxed{c = \frac{mV_0}{k}}$$

$$s(t) = \frac{mV_0}{k} - \frac{mV_0}{k} \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$\boxed{s(t) = \frac{mV_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)}$$

cismin ne kadar uzakta duracağını bulmak için $s(t)$'nin $t \to \infty$'a gidiyor iken limit aramamız gerekir. $-\frac{k}{m} < 0$ olduğu için $t \to \infty$'a gidiyor iken $e^{-\frac{k}{m}t} \to 0$'a yaklaşır. Yani;

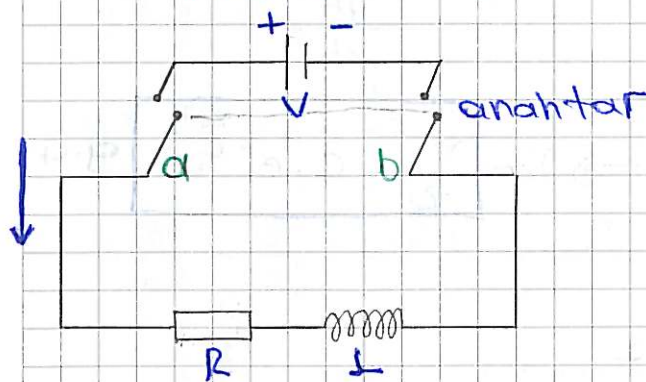
$$\lim_{t \to \infty} s(t) = \frac{mV_0}{k} \lim_{t \to \infty} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

$= \frac{mV_0}{k}$ bulunur. Yani alınan mesafe $= \frac{mV_0}{k}$ olur.

Zamanı sadece matematik düşünceyle sonsuza uzatabiliriz. $\frac{V_0 m}{k}$ sayısı sadece bir üst sınırdır.

m büyükse cismi durdurmak için çok fazla enerji gerekir.

RL Devreleri



Bu diyagram toplam direnci sabit R ohm ve sarım olarak gösterilen öz induktansı sabit L henry olan bir elektrik devresidir. a ve b uçları sabit V voltluk bir elektrik kaynağını birleştirecek şekilde kapatılan bir anahtar böyle bir devre için $V = IR$ (ohm kanunu) bunu değiştirecek

bu durumun değiştirilmiş hali olarak bu devre için şu geçerlidir.

$$L.\frac{dI}{dt}+IR=V \quad (\text{Lineer})$$ (Elektrik devrelerinde Ana dif. denklemlerinden biridir)

I = Akım şiddeti (Akım)

t = saniye (zaman)

Bu denklemi çözerek anahtar kapandıktan sonra akımın nasıl akacağını bulabiliriz. Bu devre $t=0$ anında kapatılsın. Akım zamanın fonksiyonu olarak nasıl olacaktır, bakalım. Dolayısıyla bu denklemi çözmemiz gerekecek çözelim.

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{V}{L}$$

$$\lambda=e^{\int \frac{R}{L}dt}=e^{\frac{R}{L}t}$$

$$e^{\frac{R}{L}t}.I=\frac{V}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}dt+c$$

$$=\frac{V}{L}.\frac{L}{R}.e^{\frac{R}{L}.t}+c \Rightarrow I=\boxed{\frac{V}{R}+c.e^{-\frac{R}{L}t}} \quad \text{g.ç.}$$

$I(0)=0$ olan

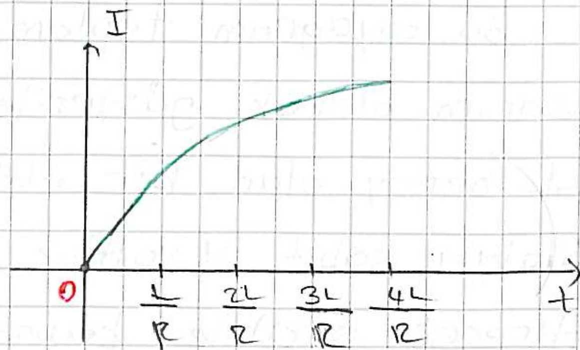
$$I(0)=0 \Rightarrow \frac{V}{R}+c\,e^{-\frac{R}{L}0} \quad 1$$

$$c=-\frac{V}{R}$$

$$\boxed{I(t)=\frac{V}{R}-\frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}.t}}$$

veya

$$\boxed{I(t)=\frac{V}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})}$$



13/10/2010

$F(x,y,y',y'')=0 \xrightarrow{\text{çözüm}} f(x,y,c_1,c_2)=0$ şeklindeki Denklemlerin 1. Mertebeden Denklemlere İndirgenmesi

1) y'yi içermeyen Denklemler:

$F(x,y',y'')=0$ Denklemin Genel Şekli)

Bu durumdaki denklemlerde

$$y'=p=\frac{dy}{dx}$$

$$y''=p'=\frac{dp}{dx}$$

$F\left(x,p,\frac{dp}{dx}\right)=0 \rightarrow \ldots$ (Bu da çözülür)

Çözüm $f(x,y,c_1,c_2)=0$ olur.

ÖR

$$xy''-y'=x^3$$

$$y'=p,\quad y''=\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow x\frac{dp}{dx}-p=x^3$$

$$\rightarrow \frac{dp}{dx}-\frac{1}{x}p=x^2 \text{ (Lineer)}$$

$$\lambda=e^{-\int\frac{dx}{x}}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x}p=\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx}=\int\frac{1}{x}\cdot x^2dx+c_1$$

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{2}+c_1$$

$$dy=\left(\frac{x^3}{2}+c_1x\right)dx$$

$$\boxed{y=\frac{x^4}{8}+\frac{c_1}{2}x^2+c_2}$$

g.ç.

ÖR: $y'' = (x+y')^2$

$$\left.\begin{array}{l} y' = p \\ y'' = \dfrac{dp}{dx} \end{array}\right) \rightarrow \frac{dp}{dx} = (x+p)^2, \quad x+p=u$$

$$1 + \frac{dp}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

P ve Q'nun lineer olma durumu

$$\frac{du}{dx} - 1 = u^2$$

$$\frac{du}{dx} = u^2 + 1$$

$$\frac{du}{u^2+1} = dx$$

$$\arctan u = x + c_1$$

$$\arctan(x+p) = x + c_1$$

$$\arctan\left(x + \frac{dy}{dx}\right) = x + c_1$$

$$x + \frac{dy}{dx} = \tan(x + c_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(x+c_1) - x$$

$$dy = (\tan(x+c_1) - x)\,dx$$

$$y = \int \tan(x+c_1)\,dx - \int x\,dx$$

$$\boxed{y = -\ln|\cos(x+c_1)| - \frac{x^2}{2} + c_2}$$

9.4

GIPTA

ÖR

$$y'' + (y')^2 = 0$$
$$y' = p$$
$$y'' = \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = -p^2$$

$$\frac{dp}{p^2} = -dx$$

$$-\frac{1}{p} = -x + c_1$$

$$p = \frac{1}{x - c_1} = \frac{dy}{dx}$$

↓

$$\frac{dx}{x - c_1} = dy$$

$$\boxed{y = \ln|x - c_1| + c_2}$$ g.ç.

ÖR

• $$xy'' = y'$$

$$y' = p$$

$$y'' = \frac{dp}{dx}$$

$$x \frac{dp}{dx} = p$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln p = \ln x + \ln c_1$$

$$p = c_1 x = \frac{dy}{dx}$$

$$c_1 x \, dx = dy$$

$$\boxed{y = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2}$$ g.ç.

veya

GIPTA

$$x y'' = y'$$

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$$

$$\ln y' = \ln x + \ln c_1$$

$$y' = c_2 x = \frac{dy}{dx}$$

$$\boxed{y = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2}$$ 9.4

2) $F(x, y, y', y'') = 0$ x'i içermemesi

$F(y, y', y'') = 0$ denklemini ele alalım.

Bu tür denklemlerde

$$y' = p$$

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx}$$ p

$$y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$$

ÖR

$$y'' = 2yy'$$

$$y' = p$$

$$y'' = p \frac{dp}{dy}$$

$$p \frac{dp}{dy} = 2yp \quad , \quad (p \neq 0)$$

$$dp = 2y\,dy$$

$$p = y^2 + c_1 = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{y^2 + c_1} = dx$$

$(\sqrt{c_1})^2$

GIPTA

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{c_1}} \arctan \frac{y}{\sqrt{c_1}} = x + c_2}$$ g.c.

veya

$y'' = 2yy'$

$y' = y^2 + c_1 = p$

$\frac{dy}{dx} = y^2 + c_1$

$\frac{dy}{y^2 + c_1} = c_1$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{c_1}} \arctan \frac{y}{\sqrt{c_1}} = x + c_2}$$ g.c.

ÖR

$yy'' = (y')^2$

$y' = p$

$y'' = p\frac{dp}{dy}$

$yp\frac{dp}{dy} = p^2$

$y\frac{dp}{dy} = p$

$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$

$\ln p = \ln y + \ln c_1$

$p = \frac{dy}{dx} = c_1 y$

$\frac{dy}{c_1 y} = dx$

$$\boxed{\frac{1}{c_1} \ln|c_1 y| = x + c_2}$$ g.c.

$\ln|p| = \ln c_1 + \ln b$

$p = c_1 b$

ÖR

$$yy'' + (y')^2 = yy'$$

$$y' = p$$

$$y'' = p\frac{dp}{dy}$$

$$yp\frac{dp}{dy} + p^2 = yp$$

$$y\frac{dp}{dy} + p = y$$

$$\frac{dp}{dy} + \frac{1}{y}p = 1 \text{ (Lineer)}$$

$$\lambda = e^{\int \frac{1}{y}dy} = y$$

$$\Rightarrow yp = y\frac{dy}{dx} = \int y\,dy + c_1$$

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2} + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2} + \frac{c_1}{y} = \frac{y^2 + 2c_1}{2y}$$

$$\rightarrow \frac{2y\,dy}{y^2 + 2c_1} = dx$$

$$\boxed{\ln|y^2 + 2c_1| = x + c_2}$$

g.ç.

ÖR

$$y'' = 2y(y')^3$$

$$y' = p$$

$$y'' = p\frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow p\frac{dp}{dy} = 2yp^3$$

$$\frac{dp}{dy} = 2yp^2$$

$$\frac{dp}{p^2} = 2y\,dy$$

$$-\frac{1}{p} = y^2 + c_1$$

$$p = -\frac{1}{y^2 + c_1} = \frac{dy}{dx}$$

$$(y^2 + c_1)dy = -dx$$

$$\boxed{\frac{y^3}{3} + c_1 y + c_2 = -x}$$

g.ç.

Yüksek Mertebeden 1. Dereceden Dif. Denklemler

A)

a) Yüksek mertebeden sabit katsayılı Homojen (Eşitliğin 2. tarafı sıfır) Dif. Denklemler.

b) Yüksek mertebeden sabit katsayılı Homojen olmayan (Eşitliğin 2. tarafı sıfır değil) Dif. Denklemler.

B)

a) Yüksek mertebeden değişken katsayılı Homojen Dif. Denklemler.

b) Yüksek mertebeden değişken katsayılı Homojen olmayan Dif. Denklemler.

A)

a) Genel yapısı şöyledir;

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

$(a \leq i \leq n, \ a \in R)$

b) Genel yapısı şöyledir;

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

B)

a) Genel yapısı şöyledir;

$$a_n(x) y^{n} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_3(x) y''' + a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$$

$a_i(x)$'ler x'in fonksiyonları ($ax+b$, ax^2+bx+c, $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$, $\tan x$ ...)

b) Genel yapısı şöyledir;

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_3(x)y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

Fonksiyonlarda Lineer Bağımlılık Lineer Bağımsızlık

$y_1 = y_1(x)$,

$y_1, y_2, y_3 \dots y_n$ fonksiyonları verilsin

$W = W[y_1, y_2, y_3 \dots y_n] = 1$

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3 & \dots & y_n \\ y_1', & y_2', & y_3' & \dots & y_n' \\ y_1'', & y_2'', & y_3'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & & & & \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, & y_3^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

→ determinantına WRONSKI determinantı denir.

Eğer;

1) $W = 0$ ise y_i fonksiyonları lineer bağımlıdırlar.

2) $W \neq 0$ ise y_i fonksiyonları lineer bağımsızdırlar.

Ör/ $W\{1, x, x^2\} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$

$2(1 - 0x) = 2 \neq 0$ (Lineer bağımsız)

Ör: $W\{x, -3x\} = \begin{vmatrix} x & -3x \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3x + 3x = 0$ (Lineer Bağımlıdır)

Ör: $W\{e^x, e^{-x}\} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$ (Lineer Bağımsız)

Ör: $W[\cos x, \sin x] = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} =$

$\cos^2 x + \sin^2 = 1 \neq 0$ (Lineer Bağımsız)

Yüksek Mertebeden Sabit Katsayılı Homojen Difransiyel Denklemler

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ (1)

Teorem: y_1 (1) denklemi için bir özel çözüm ise $y = c_1 y_1$ 'de bir özel çözümdür.

Teorem: y_1, y_2 'ler (1) için Lineer bağımsız iki özel çözüm iseler, $y = c_1 y_1$ $y = c_2 y_2$ bunlar da özel bir çözümdür.

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ 'de bir özel çözümdür.

Teorem: y_1, y_2, y_3 'ler (1) için Lineer bağımsız özel bir çözüm ise $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$ de özel bir çözümdür.

Teorem: $y_1, y_2, y_3 \cdots y_n$ 'ler bir denklem için Lineer bağımsız özel bir çözümler ise

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \ldots c_n y_n$ 'lerde özel bir çözümdürler.

(1) denklemi için çözüm metodu;

$a_n y^{(n)} + \ldots + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ bu denklemi sağlayan fonksiyonları arayalım. Bunun için bütün türevleri benzer olan ve bütün özel çözümleri içerecek olan $y = e^{kx}$, (k bilinmiyor) bulunacak

$y' = k e^{kx}$

$y'' = k^2 e^{kx}$

$y''' = k^3 e^{kx}$

$y^{(n)} = k^{(n)} e^{kx}$

$e^{kx}(a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \ldots a_3 k^3 + a_2 k^2 + a_1 k + a_0) = 0$

$e^{kx} \neq 0 \quad \forall x, k$ için

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \ldots + a_3 k^3 + a_2 k^2 + a_1 k + a_0 = 0$$

polinomuna (1) denkleminin karakteristlik polinomu denir.

2. Dereceden Denklemin Köklerini Bulma Denklemi

$ax^2 + bx + c = 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{-b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

14/10/2010

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 = 0$$

$$a_n k^{(n)} + a_{n-1} k^{(n-1)} + \dots + a_3 k^3 + a_2 k^2 + a_1 k + a_0 = 0$$

veya

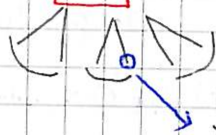
$x^2 + bx + c = 0$ → x_1, x_2) ky

b: $-(x_1+x_2)$, c: $x_1 \cdot x_2$

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ → $\dfrac{|\, x-1}{ax^2 + bx + c = 0}$ → x_2, x_3

$a+b+c+d=0$ ise $x_1 = 1$'dir.

$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ → $|\, x - x_1$



x_1 = kök alalım

Karakteristik denklemin köklerinin durumlarına göre verilen denklemin çözümlerini irdeleyelim.

1) Karakteristik denklemin kökleri farklı real sayılar olsun.

$k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq \dots \neq k_n \in R$

Bu durumda genel çözüm

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + c_3 e^{k_3 x} + \dots + c_n e^{k_n x}$$ g.ç.

y_1 y_2 y_3 y_n

ÖR

$$y'' - y' - 2y = 0$$

$$k^2 - k - 2 = 0 \quad \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = 2 \end{cases} \quad \text{Ters alınmış hali}$$

$-1 . 2$

$$\boxed{y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}} \quad g.ç$$

ÖR

$$y'' - y = 0$$

$$k^2 - 1 = 0 \quad \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}} \quad g.ç.$$

ÖR

$$y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$$

$$k^3 + 2k^2 - 5k - 6 = 0$$

$k_1 \leftarrow$ (−1) 1 −2 2
−6 6 3 −3

$$-1 + 2 + 5 - 6 = 0$$

$$\begin{array}{l|l} k^3 + 2k^2 - 5k - 6 & k+1 \\ \underline{\mp k^3 \mp k^2} & k^2 + k - 6 = 0 \\ k^2 - 5k & \\ \underline{\mp k^2 \mp k} & \\ -6k - 6 & \\ \underline{\pm 6k \pm 6} & \\ 0 \quad 0 & \end{array}$$

$$k^2 + k - 6 = 0 \quad \begin{cases} k_2 = 2 \\ k_3 = -3 \end{cases}$$

$$\boxed{y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-3x}} \quad g.ç.$$

2) Karakteristik denklemin kökleri katlı reel sayılar olsun; $k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_n \in R$ olsun

Bu durumda genel çözüm;

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_n x^{n-1})\, e^{k_1 x}$$ g.ç.

$y_1 = e^{k_1 x}$

$y_2 = x\, e^{k_1 x}$

$y_3 = x^2 e^{k_1 x}$

$\vdots$

$y_n = x^{n-1} e^{k_1 x}$

ÖR $y'' + 2y' + y = 0$

$k^2 + 2k + 1 = 0 \rightarrow (k+1)^2 = 0 \rightarrow k_1 = k_2 = -1$

$$y = (c_1 + c_2 x)\, e^{-x}$$ g.ç.

ÖR $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$

$(k-1)^3 = 0 \rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 1$

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)\, e^{x}$$ g.ç

3) Karakteristik denklemin köklerinden bir kısmı katlı reel geri kalan kısmı farklı reel sayı olsun.

$k_1 = k_2 = k_3 = \ldots = k_p \in \mathbb{R}$,

$k_{p+1} \neq k_{p+2} \neq \ldots \neq k_n \in \mathbb{R}$

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots c_p x^{p-1}) e^{k_1 x} + c_{p+1} e^{k_{p+1} x} + c_{p+2} e^{k_{p+2} x} + \ldots + c_n e^{k_n x}$$

g.ç.

ÖR

$y^{V} - 5y^{IV} + 6y''' = 0$

$k^5 - 5k^4 + 6k^3 = 0$

$k^3 (k^2 + 5k + 6) = 0$ → $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, $k_4 = 2$, $k_5 = 3$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{2x} + c_5 e^{3x}$$ g.ç.

ÖR

$y^{IV} - y''' - 9y'' - 11y' - 4y = 0$

$k^4 - k^3 - 9k^2 - 11k - 4 = 0$

k_1 ← (−1) 1 −2
4 −4 2

$1 + 1 - 9 + 11 - 4 = 0$

$k^4 - k^3 - 9k^2 - 11k - 4$ | $k+1$
$\mp k^4 \mp k^3$ | $k^3 - 2k^2 - 7k - 4 = 0$ → $k_2 = -1$
$-2k^3 - 9k^2$
$\pm 2k^3 \pm 2k^2$
$-7k^2 - 11k$
$\pm 7k^2 \pm 7k$
$-4k - 4$
$\pm 4k \pm 4$
$0 \; 0$

$-1 - 2 + 7 - 4 = 0$ | $k+1$
$k^2 - 3k - 4 = 0$ → $k_3 = -1$, $k_4 = 4$
−1
4

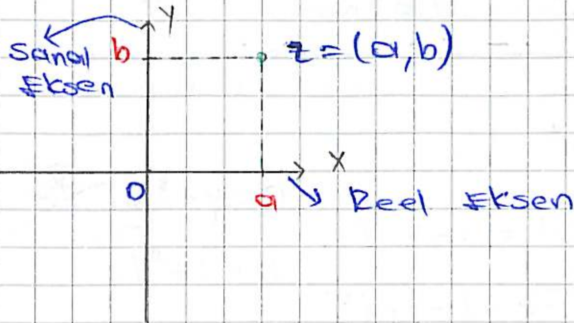
$(k+1)^3 (k-4) = 0$

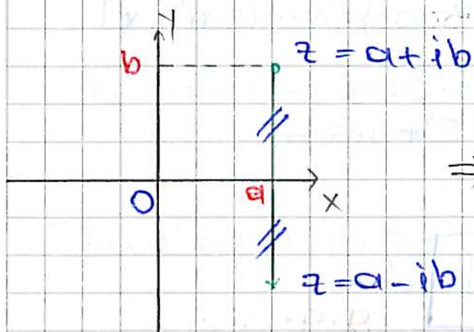
$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{-x} + c_4 e^{4x}$$ g.ç.

1) Kökler kompleks sayı olsun

$z = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$ (Kompleks sayı) $i = \sqrt{-1}$

$z = (a, b) = a + ib$





⇒ $z = a + ib$ 'nin eşleniği

$\bar{z} = a - ib$ 'dir.

$z = 3 + 2i \longrightarrow \bar{z} = 3 - 2i$

$z = -3 - 2i \longrightarrow \bar{z} = -3 + 2i$

$$e^{\mp} = \cos x \mp i \sin x$$

Karakteristik polinomun (denklemin) kökleri farklı kompleks sayılar olsun

$k_1 = a_1 + ib_1$, $k_2 = a_1 - ib_1$) 1

$k_3 = a_2 + ib_1$, $k_4 = a_2 - ib_2$) 2

⋮

$k_{n-1} = a_n + ib_n$, $k_n = a_n - ib_n$) 3

$$y = A_1 e^{k_1 x} + A_2 e^{k_2 x} + \dots + A_n e^{k_n x}$$ g.ç

1) Kökleri için

$y = Ae^{k_1 x} + Be^{k_2 x}$

$y = Ae^{(a_1 + ib)x} + Be^{(a_1 - ib)x}$

$y = Ae^{a_1 x} \cdot e^{ib_1 x} + Be^{a_1 x} \cdot e^{-b_1 x}$

$y = e^{a_1 x} [Ae^{ib_1 x} + Be^{-ib_1 x}]$

$y = e^{a_1 x} [A\cos b_1 + i\sin b_1 x] + [B\cos b_1 x - i\sin b_1 x]$

$y = e^{a_1 x} [\underbrace{(A+B)}_{c_1} \cos b_1 x + i\underbrace{(A-B)}_{c_2} \sin b_1 x]$

$$y = e^{a_1 x} [c_1 \cos b_1 x + c_2 \sin b_1 x]$$ g.ç.

2) Kökleri için

$$y = e^{a_2 x} [c_3 \cos b_2 x + c_4 \sin b_2 x]$$ g.ç.

3) Kökleri için

$$y = e^{a_n x} [c_{n-1} \cos b_n x + c_n \sin b_n x]$$ g.ç.

$$y = e^{a_1 x}(c_1\cos b_1 x + c_2 \sin b_1 x) + e^{a_2 x}(c_3 \cos b_2 x + c_4 \sin b_2 x) + \dots + e^{a_n x}(c_{n-1}\cos b_n x + c_n \sin b_n x)$$ g.ç.

ÖR $y'' + y = 0$

$k^2 + 1 = 0$ → $k_1 = -i = \sqrt{-1}$, $k_2 = +i = \sqrt{-1}$

($\sqrt{-b} = i\sqrt{b}$ $\forall \in R$ için) — Her

$\sqrt{-b^2} = ib$

$k_1 = -i = 0 - i \iff a - ib \Rightarrow a = 0$, $b = 1$

$k_2 = i = 0 + i \longrightarrow a = 0$, $b = 1$

$y = e^{ax}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$ g.ç.

ÖR $y'' + 2y' + 2y = 0$

$k^2 + 2k + 2 = 0$ → $k_1 = \frac{-1-\sqrt{1-2}}{1} = -1-i$, $k_2 = -1+i$

$$y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$ g.ç.

$y'' + 4y \Rightarrow$ $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

20/10/2010

$k_1 = k_2 = 0$

$k_3 = 2$

$k_4 = -3$

$k_5 = 1+i$

$k_6 = 1-i$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-3x} + e^{x}(c_5 \cos x + c_6 \sin x)$$ g.ç.

(1) $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots\ldots a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$ Homojen Değil

$=0$ ise Homojen

(1) numaralı denklemin genel çözümü denklemin homojen kısmının genel çözümü ile denklemin tamamının bir özel çözüm toplamı şeklindedir.

Teorem: $y_{n(g.ç)} = y = y_{n.k.(g.ç)} + y_{ö.ç.}$

ÖR

$y'' - y' - 2y = 4$

$k^2 - k - 2 = 0 \rightarrow k_1 = -1,\ k_2 = 2$

$y_{öç} = -2$

$$\Rightarrow y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - 2$$ g.ç.

ÖR

$y'' + 9y = 18x$

$k^2 + 9 = 0 \rightarrow 3i,\ -3i$

$y_{öç} = 2x$

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + 2x$$ g.ç.

TUNCAY

GIPTA

[illegible] için;

$[illegible] + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots\ldots a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = P(x) e^{kx}$, $k \in R$ $P(x)$ polinomun

[illegible] denklemlerin çözümünü k'nın karakteristik

[illegible] olmadığını irdeleyeceğiz.

[illegible] polinomun kökü olmasın

$[illegible]\, q(x)\, e^{kx}$

[illegible] derecesinden katsayıları bilinmeyen

[illegible]nomdur.

[illegible]leri hesaplanır. Dif. Denkleminde

[illegible] yapılır. Bu özdeşlikten

$[illegible] + c_1 x + d_1$

$[illegible] e^{0x}$

$k = 0$

[illegible] değil

$k = 0$

$k = 0$

① Denklemi için;

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots\dots a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = P(x) e^{kx}$, $k \in R$ $P(x)$ polinomun

Bu tür denklemlerin çözümünü k'nın karakteristik polinomun kökleri olup olmadığını irdeleyeceğiz.

1) k karakteristlik polinomun kökü olmasın.

$k,\quad y_{öç} = y = Q(x) \cdot e^{kx}$

$Q(x)$ $P(x)$ polinomunun derecesinden katsayıları bilinmeyen bulunması gereken bir polinomdur.

$y', y'', y''' \dots y^{(n)}$ (≡) Türevleri hesaplanır. Dif. Denkleminde yerine yazılır. Eşitlik özdeşlik yapılır. Bu özdeşlikten katsayılar bulunur.

Özdeşlik

$ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1$

$$\begin{pmatrix} a = a_1 \\ b = b_1 \\ c = c_1 \\ d = d_1 \end{pmatrix}$$

ÖR

$y'' + 9y = 18x \quad \underline{\underline{\text{esası}}} \quad 18x \cdot e^{0x}$, $k = 0$

$k^2 + 9 = 0 \rightarrow k_1 = 3i,\ k_2 = -3i$) kök değil

$y_{öç} = y = (ax + b)$

$y' = a$ $9a + 9b = 18x$

$y'' = 0$ $9a = 18$ $9b = 0$

$a = 2$ $b = 0$

$y_{öç} = 2x$

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + 2x$$ g.ç

ÖR

$y'' - y' - 2y = x^2 + x - 3$

$k^2 - k - 2 = 0$ → $k_1 = -1$, $k_2 = 2$) $k=0$ kök değil

$y_{öç} = y = ax^2 + bx + c$

$y' \; 2ax + b$

$y'' \; 2a$

$\rightarrow 2a - 2ax - b - 2ax^2 - 2bx - 2c \equiv x^2 + x - 3$

$-2ax^2 - (2a + 2b)x + 2a - b - 2c \equiv x^2 + x - 3$

$-2a = 1$, $-2a - 2b = 1$

$a = -\frac{1}{2}$, $x - 2b = x$

$b = 0$

$-2a - b - 2c = -3$

$-1 - 0 - 2c = -3$

$-2c = -2$

$c = 1$

$y_{öç} = -\frac{1}{2}x^2 + 1$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 + 1$$ g.ç

ÖR $y'' - y' - 2y = x^2 e^x \rightarrow k = 1$

$k^2 - k - 2 = 0$ → $k = -1$, $k = -2$) kök değil

$y_{öç} = y = (ax^2 + bx + c)e^x$

$y' = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$

$y'' = 2ae^x + (2a + b)e^x + (2axb)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$

$4ax + 2b$

$\Rightarrow (2a + 4ax + 2b + ax^2 + bx + c - 2ax - b - ax^2 - bx - c - 2ax^2 - 2bx - 2c)e^x \equiv x^2 e^x$

$\Rightarrow -2ax^2 + (2a - 2b)x + 2a + b - 2c \equiv x^2 = x^2 + 0.x + 0$

$-2a = 1$ $\qquad$ $2a - 2b = 0$ $\qquad$ $2a + b - 2c = 0$

$a = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $b - 0 = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $-1 - \frac{1}{2} = 2c \Rightarrow c = -\frac{3}{4}$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)e^x$$

g.ç.

2) k karakteristlik polinomun r katlı kökü olsun bu durumda özel çözüm şöyle aranır.

$y_{öç} = y = x^r . Q(x) e^{kx}$

Türevler alınır yerine konur özdeşlikler bulunur.

ÖR $y'' - 5y' + 6y = 2e^{2x} \rightarrow k = 2$

$k_1 = 2$, $k_2 = 3$) 1 katlı kök

$y_{öç} = y = x - ae^{2x}$

$y' = ae^{2x} + 2axe^{2x}$

$y'' = 2ae^{2x} + 2ae^{2x} + 4axe^{2x}$

$4ae^{2x}$

$(4a+4ax-5a-10ax+6ax)e^{2x} \equiv 2e^{2x}$

$-a=2$

$a=-2$

$y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}-2xe^{2x}$ g.4.

ÖR $y''+y'-2y=x^2e^x \rightarrow k=1$

$k_1=1$, $k_2=-2$) 1 katlı kök

$y_{öç}=y=x(ax^2+bx+c)e^x$

$y=(ax^3+bx^2+cx)e^x$

$y'=(3ax^2+2bx+c)e^x+(ax^3+bx^2+cx)e^x$

$y''=(6ax+2b)e^x+(3ax^2+2bx+c)e^x+(3ax^2+2bx+c)e^x+(ax^3+bx^2+cx)e^x$

$(6ax+2b+6ax^2+4bx+2c+ax^3+bx^2+cx+3ax^2+2bx+c+ax^3+bx^2+$
$cx-2ax^3-2bx^2-2cx)e^x \equiv e^x$

$9ax^2+(6a+6b)x+2b+3c \equiv x^2$

$9a=1$, $6a+6b=0$, $2b+3c=0$

$a=\frac{1}{9}$ $b=-\frac{1}{9}$ $3c=\frac{2}{9}$

$c=\frac{2}{27}$

$y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{9}x^2+\frac{2}{27}x\right)e^x$ g.4.

ÖR $y''-2y'+y=4e^x \rightarrow k=1$

$k_1=k_2=1$ 2 katlı kök

$y_{öç}=y=x^2ae^x$

$y'=2axe^x+ax^2e^x$

$y''=2ae^x+2axe^x+2axe^x+ax^2e^x$

$(2a+4ax+ax^2-4ax-2ax^2+ax^2)e^x \equiv 4.e^x$

$2a \equiv 4 \qquad 2a=4$

$a=2$

$y=(c_1+c_2x)e^x+2x^2e^x$ g.ç.

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = P(x)\cos\beta e^{kx}, \; P_1(x)\sin\beta_1 x e^{k_1}$

$P(x)\cos\beta x e^{kx}$ geçerli olsun bu durumda $k+i\beta$ işte bu sayının karakteristlik polinomunun kökü olup olmayışını irdeleyeceğiz

1) $k+i\beta$ karakterislik polinomun kökü olmasın bu durumda özel çözüm

$y_{öç}=y=[Q_1(x)\cos\beta x+Q_2(x)\sin\beta x]e^{kx}$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ polinomları $P(x)$'in derecesinden katsayıları bulunması gereken polinomlar türevlerini alınıp yerine konup özdeşikler katsayılar bulunur.

21/10/2010

ÖR $y''-y'-2y=x+3e^{-x}$

$x \to k=0$, $3e^{-x} \to k=-1$

$k^2-k-2=0 \to k_1=-1$, $k_2=2$

$k=0$ kök değil; $k=-1$ 1 katlı kök

$y_{öç}=y=ax+b+cxe^{-x}$

$y'=a+ce^{-x}-cxe^{-x}$

$y''=-c.e^{-x}-ce^{-x}+cxe^{-x}$

$$-a-2ax-2b+(-2c+cx-c+cx-2cx)e^{-x} \equiv x+3e^{-x}$$

$-2a=1$

$a=-\frac{1}{2}$

$-3c=3$

$c=-1$

$-a-2b=0$

$\frac{1}{2}-2b=0 \quad b=\frac{1}{4}$

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-xe^{-x}$$

g.ç.

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots\dots+a_3y'''+a_2y''+a_1y'+a_0y=P(x)\cos\beta x.e^{kx}=f(x)$$ (1)

$k+i\beta$

veya

$$P(x)\sin\beta_1 x e^{k_1x}=f(x)$$ (2)

1 veya 2'deki komplex sayıların karakteristik polinomun kökü olup olmayışına göre özel çözümler şöyle aranır.

(1) için $y_{öç}=y=[Q_1(x)\cos\beta x+Q_2(x)\sin\beta x]e^{kx}$

y', y'', y''' türevleri alınır. Yerine konur. Özdeşlikten söz konusu katsayılar bulunur.

(2) için $y_{öç}=y=[Q_1'(x)\cos\beta_1 x+Q_2'(x)\sin\beta_1 x]e^{k_1 x}$

Ör

$y''+4y=\cos x$

$k=0$, $\beta=1$ $\rightarrow$ $i=k+i\beta$

$k^2+4=0 \rightarrow k_1=2i$, $k_2=-2i$) kök değil

GIPTA

$y_{öç} = y = a\cos x + b\sin x$

$y' = -a\sin x + b\cos x$

$y'' = -a\cos x - b\sin x$

$(-a\cos x - b\sin x + 4a\cos x + 4b\sin x) \equiv \cos x$

$3a\cos x + 3b\sin x \equiv \cos x$

$3a = 1 \qquad 3b = 0$

$a = \frac{1}{3} \qquad b = 0$

$$y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \frac{1}{3}\cos x$$ g.4

ÖR

$y'' + 4y = x\sin x e^x$

$k_1 = 2i \qquad k = 1$

$k_2 = -2i \qquad B = 1 \quad \Big) \to 1+i$

Kök değil

$y_{öç} = [(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x]e^x$

$y' = [a\cos x + (-ax-b)\sin x + c\sin x + (cx+d)\cos x]e^x + [(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x]e^x$

$y'' = [-a\sin x - a\sin x + (-ax-b)\cos x + c\cos x + c\cos x + (-cx-d)\sin x]e^x$

$+ [a\cos x + (-ax-b)\sin x + c\sin x + (cx+d)\cos x]e^x$

$+ [a\cos x + (-ax-b)\sin x + c\sin x + (cx+d)\cos x]e^x$

$+ [(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x]e^x$

$[(-ax-b+2c+a+cx+d+a+cx+d+ax+b+4ax+4b)\cos x +$

$(-2a-cx-d-ax-b+c-ax-b+c+cx+d)\sin x]e^x = [0.\cos x + x\sin x]e^x$

$(4a+2c)x + 2a+4b+2c+2d \equiv 0$

$$\begin{cases} -2a+4b+2c+2d=0 \\ -2ax-2a-2b+2c \equiv x \end{cases}$$

$4a+2c=0$

$2a+c=0$

$2\cdot -\frac{1}{2}+c=0$

$-2a=1$

$a=-\frac{1}{2}$

$-2a-2b+2c=0$

$-a-b+c=0$

$-b+c=-\frac{1}{2} \rightarrow b=\frac{3}{2}$

$c=1$

$-\frac{1}{2}+3+1=d \qquad \frac{7}{2}=-d$

$\frac{1}{2}+3=-d \qquad d=-\frac{7}{2}$

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\left[\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\cos x+\left(x-\frac{7}{2}\right)\sin x\right]e^x$$

g.4

2) $k+i\beta$ karakteristlik polinomun r katlı kökü olsun.

$$y_{öç_1}=y=x^r\left[Q_1(x)\cos\beta x+Q_2(x)\sin\beta x\right]e^{kx}$$

ör $y''+2y'+2y=\sin x\, e^{-x}$

$k=-1$, $\beta=1$ $\Rightarrow -1+i$

$k^2+2k+2=0 \rightarrow -1-i,\ -1+i$ ← Bir katlı kök

$$y_{öç_1}=y=[x a\cos x+b\sin x]e^{-x}$$

$y'=a\cos x-ax\sin x+b\sin x+bx\cos x]e^{-x}+[-ax\cos x-bx\sin x]e^{-x}$

$y''=[-2a\sin x-ax\cos x+2b\cos x-bx\cos x]e^{-x}$

$+[-a\cos x+ax\sin x-b\sin x-bx\cos x]e^{-x}$

$+[-a\cos x+ax\sin x-b\sin x-bx\cos x]e^{-x}$

$+(ax\cos x+bx\sin x]e^{-x}$

$(-ax+2b-a-bx-a-bx+ax+2a+2bx-2ax+2ax)\cos x$

$+(-2a-bx+ax-b+ax-b+bx-2ax+2b-2bx)\sin x]e^{-x}=$

$=2\sin x\, e^{-x} \longrightarrow (0.\cos x+2\sin x)e^{-x}$

$-2a = 2 \qquad 2b = 0$

$a = -1 \qquad b = 0$

$$y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) - x \cos x \, e^{-x}$$

g.ç.

27/10/2010

ÖDEV: 12

1) $y^{iv} - 2y'' = 0$

2) $y^{iv} + 4y = 0$

3) $y^{iv} - y = 0$

4) $y^{iv} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$

5) $y'' - 6y' + 8y = 0$

6) $y'' - 4y' + 4y = x^2 + x - 2$

7) $y'' - 6y' + 3y = e^x + e^{2x}$

8) $y''' + y'' + y' + y = x e^x$

9) $y'' + 4y = 2x \sin 2x$

10) $y'' + 3y' + 2y = (x-2)e^x$

11) $y'' + 2y' - 3y = x \cos x + 2 \sin x$

12) $y'' - 4y = e^x \cos x$

13) $y'' - 4y' + 3y = 4e^{2x}$

14) $4y'' + 4y' + y = 6e^{-\frac{x}{2}}$

15) $y''' + y'' = x^2 + 2 + 3xe^x$

16) $y'' + 9y = (x^2 + 2x + 1)e^{3x}$

17) $y'' + y = e^x \cos x$

18) $y'' - y = 4e^{2x} \sin x$

B)

a) $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots a_3(x)y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ (Homojen) ①

Teorem: $y_1, y_2, y_3 \dots y_n$ bir denklemin lineer bağımsız özel çözümleri ise

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots c_ny_n$$ g.ç.

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Uygulamalarda daha çok karşılaşılanlar 2. mertebeden denklemlerdir.

$$y'' + \frac{a_1}{a_2}y' + \frac{a_0}{a_2}y = 0$$

$e_1(x)$ $e_2(x)$

$$y'' + e_1(x)y' + e_2(x)y = 0$$

$y_1 = y_1(x)$ bir özel çözüm ise

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int e_1(x)dx}}{y_1^2} dx$$ diğer özel çözüm olur. (Lineer bağımsızdır)

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$ g.ç.

Ör

$$x^2y'' + xy' - y = 0$$

$y_1 = x$ ö.ç.

$$y_2 = x \int \frac{e^{-\int \frac{1}{x}dx}}{x^2} dx$$

GIPTA

$$Y_2 = X\int \frac{\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$$

$$Y_2 = X\int \frac{1}{x^3}\,dx$$

$$Y_2 = \left(-\frac{1}{2x^2}\right) = -\frac{1}{2x}$$

$$y = c_1 x + c_2\left(-\frac{1}{2x}\right)$$ g.ç.

ÖR $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$, $y_1 = \frac{\cos x}{x}$ ö.ç.

$$Y_2 = \frac{\cos x}{x}\int \frac{e^{-\int \frac{2}{x}dx}}{\frac{\cos^2 x}{x^2}}\,dx$$

$$Y_2 = \frac{\cos x}{x}\int \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{\cos 2x}{x^2}}\,dx$$

$$Y_2 = \frac{\cos x}{x}\int \frac{dx}{\cos^2 dx}$$

$$Y_2 = \frac{\cos x}{x}\,\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$Y_2 = \frac{\sin x}{x}$$ $$y = c_1\frac{\cos x}{x} + c_2\frac{\sin x}{x}$$

(1) denklemi için çözüm metodu

Mertebe düşürme metodu.

(1) için $y_1 = y_1(x)$ bir özel çözüm ise

$y = y_1 z$, $z = z(x) = ?$ (Bulunacak)

$y', y'', \text{------} y^{(n)}$ (türevleri alınır)

(1) denkleminde yerine yazılır. Sadeleştirme sonucu z'li terim ortada kalmamak üzere (1) denklemi

$z', z'' \ldots, z^{(n)}$'li türevlerini içeren durumda olur.
Bu denklemde $z' = u$ $u = u(x) = ?$ (Bulunacak)

$z'' = u'$

$\vdots$

$z^{(n)} = u^{(n-1)}$ yazılarak u ve u'nun $(n-1)$ mertebeden türevini içeren bir dif. denklem karşımıza gelir. Bu denklemin mertebesi ① denkleminin mertebesinden 1 düşük olur.

ÖR $y'' - \frac{2}{\sin^2 x} y = 0$, $y_1 = \cotan x$

$y = z \cotan x$

$y' = z' \cotan x - \frac{z}{\sin^2 x}$

$y'' = z'' \cotan x - \frac{z'}{\sin^2 x} - \frac{z' \sin^2 x - 2z \sin x \cos x}{\sin^4 x}$

$z'' \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{2z'}{\sin^2 x} + \frac{2z \cos x}{\sin^3 x} - \frac{2}{\sin^2 x} z \frac{\cos x}{\sin x} = 0$

$z'' \sin x \cos x \; 2z' = 0$

$z'' \frac{\sin 2x}{2} - 2z' = 0$

$z'' \sin 2x - 4z' = 0$

$z' = u$

$z'' = u'$

$u' \sin 2x - 4u = 0$

$\frac{u'}{u} = \frac{4}{\sin 2x}$

$$\ln u = 4\int \frac{dx}{\sin 2x} \qquad \begin{pmatrix} 2x = v \\ dx = \frac{dv}{2} \end{pmatrix}$$

$$2\int \frac{dv}{\sin v} \qquad \begin{pmatrix} \tan\frac{v}{2} = t \\ dv = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin v = \frac{2t}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

$$\ln u \; 2\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{t}$$

$$\ln u = 2\ln t + \ln c_1$$

$$u = c_1 t^2 = c_1 \tan^2\frac{v}{2}$$

$$z' = \frac{dz}{dx} \quad u = c_1 \tan^2 x$$

$$dz = c_1 \tan^2 x \, dx$$

$$z = c_1 \int \tan^2 x \, dx + c_2$$

$$= c_1 \left[\int (\tan^2 x + 1 - 1)\, dx\right] + c_2$$

$$z = c_1 \left[\int (1 + \tan^2 x)\, dx - \int dx\right] + c_2$$

$$z = c_1 [\tan x - x] + c_2$$

$y = z \operatorname{cotan} x$ 'den

$$\boxed{y = [c_1(\tan x - x) + c_2] \operatorname{cotan} x}$$ g.ç.

ÖR $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$

$y_1 = x$ ö.ç

$y = xz$

$y' = z + xz'$

$y'' = 2z' + xz''$

$y''' = 3z'' + xz'''$

$3x^3z'' + x^4z''' - 6x^2z' - 3x^3z'' + 6xz + 6x^2z' - 6xz = 0$

$\Longrightarrow x^4 z''' = 0 \quad , (x \neq 0)$

$\Longrightarrow z''' = 0$

$\left(\begin{array}{l} z' = u \\ z'' = u' \\ z''' = u'' \\ u'' = 0 \end{array} \right)$

$z'' = c_1$

$z' = c_1 x + c_2$

$$\boxed{z = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3}$$

$y = xz$ 'den

$$\boxed{y = x \left(c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \right)}$$ g.ç.

ÖDEV : 13

1) $x^2y'' - xy' - 3y = 0 \quad , \quad y_1 = x^3$

2) $xy'' - (x+2)y' + y = 0$

3) $x^2y'' + xy' - (x^2 + x + 1)y = 0 \quad y_1 = \frac{e^{-x}}{x}$

4) $xy'' + (3x-1)y' + 2(x-1)y = 0 \quad , \quad y_1 = -2e^{-2x}$

b) $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots a_3(x)y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$ ①

Teorem: $y_1, y_2 \ldots y_n$ ①'in homojen kısmı için Lineer bağımsız özel çözümler ve $y_{öç}$ denklemin tamamı için bir özel çözüm ise

$$y = \underbrace{c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n}_{y_{homojen}\ g.ç.} + y_{öç}$$ g.ç.

Euler (Gauss) Dif. Denklemi

$a_nx^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_3x^3y''' + a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = f(x)$ ② $(=0)$

Çözüm metodu:

$x = e^t, \quad y = y(t)$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$ ($\frac{dy}{dt} = \dot{y}$, $\frac{dt}{dx} = e^{-t}$),

$$\left(\begin{aligned} x &= e^{(t)} \\ dx &= e^t dt \\ \frac{dt}{dx} &= e^{-t} \end{aligned} \right)$$

$y' = e^{-t}\dot{y}$

$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\dot{y}\right)\frac{dt}{dx}$ ($\frac{dt}{dx} = e^{-t}$)

$= \left(-e^{-t}\dot{y} + e^{-t}\ddot{y}\right)e^{-t}$

$y'' = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$

$y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dt}\left[e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})\right]\frac{dt}{dx}$ ($\frac{dt}{dx} = e^{-t}$)

$y''' = e^{-3t}(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y})$

$\vdots$

$y^{(n)} = e^{-n(t)}(______)$

Bu değerler ② denkleminde yerine yazılırsa denklem sabit katsayılı şekle gelir. O da çözülür.

ÖR

$x^2y'' + xy' - y = 0$ (Euler)

$x = e^{(t)}$

$y' = e^{-t}\dot{y}$

$y'' = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$

$\Rightarrow e^{2t} \cdot e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}) + e^{t} \cdot e^{-t}\dot{y} - y = 0$

$\ddot{y} - \dot{y} + \dot{y} - y = 0$

$\ddot{y} - y = 0$

$k^2 - 1 = 0 \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -1 \quad \rightarrow y(t) = c_1e^{t} + c_2e^{-t}$

$$y = c_1x + c_2\frac{1}{x}$$ g.ç.

ÖR

$x^3y'' - 2xy = 4$

(Aynı) →

$x^2y'' - 2y = \frac{4}{x}$ (Euler)

$x = e^{t}$

$y' = e^{-t}$

$y'' = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$

$\Rightarrow \ddot{y} - \dot{y} - 2y = 4e^{-t} \rightarrow k = -1$

$k^2 - k - 2 = 0 \quad k_1 = -1, \quad k_2 = 2$ — 1 katlı kök

$y_{öç} = y = at \cdot e^{-t}$

$\dot{y} = ae^{-t} - ate^{-t}$

$\ddot{y} = -ae^{-t} - ae^{-t} + ate^{-t}$

$(-2a + at - a + at - 2at)e^{-t} = 4e^{-t}$

$-3a = 4$

$a = -\frac{4}{3}$

$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - \frac{4}{3} t e^{-t}$

$y = c_1 \frac{1}{x} + c_2 x^2 - \frac{4}{3} \ln x \frac{1}{x}$ g.ç

ÖR $x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2x = \cos \ln x$ (Euler)

$x = e^t$
$y' = e^{-t} \dot{y}$
$y'' = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$
$y''' = e^{-3t}(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y})$

$\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y} - \ddot{y} + \dot{y} + 2\dot{y} - 2y = \cos t$

$\dddot{y} - 4\ddot{y} + 5\dot{y} - 2y = \cos t$

Legendre (Gauss) Dif. Denklemi

$$a_n(bx+c)^n y^{(n)} + a_{n-1}(bx+c)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2(bx+c)^2 y'' + a_1(bx+c)y' + a_0 y = f(x)$$
$$= 0$$

Çözüm metodu

$bx+c = e^t \rightarrow \frac{dt}{dx} = be^{-t}$, $y' = be^{-t}\dot{y}$

$y'' = b^2 e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$

$y''' = b^3 e^{-3t}(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y})$

$\vdots$

ÖR

$$(x+1)^2 y'' + (x+1)y' + y = 4\cos\ln(x+1)$$

$x+1 = e^t$

$y' = e^{-t}\dot{y}$

$y'' = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$

$\ddot{y} - \dot{y} + \dot{y} + y = 4\cos t \rightarrow$ $k=0$, $\beta = 1$) i

$\ddot{y} + y = 4\cos t$

$k^2 + 1 = 0 \rightarrow k_1 = i$, $k_2 = -i$) ← 1 katlı kök

$y_{öç} = y = at\cos t + bt\sin t$

$\dot{y} = a\cos t - at\sin t + b\sin t + bt\cos t$

$\ddot{y} = -a\sin t - a\sin t - at\cos t + b\cos t + b\cos t - bt\sin t$

$\rightarrow (-at + 2b + at)\cos t + (-2a - bt + bt)\sin t \equiv 4\cos t + 0\sin t$

$2b \equiv 4$ $\quad$ $-2a = 0$

$b = 2$ $\quad$ $a = 0$

$y = c_1\cos t + c_2\sin t + \frac{1}{2} t\sin t$

$$y = c_1\cos\ln(x+1) + c_2\sin\ln(x+1) + 2\ln(x+1)\sin\ln(x+1)$$

g.ç.

GIPTA

ÖDEV: 14

1) $x^2y''+3xy'+y=0$

2) $x^3y'''+2xy'-2y=x^2\ln x+2x$

3) $x^2y''-2y=x^2$

4) $x^2y''-xy'+2y=x\ln x$

5) $(x+2)^2y''-(x+2)y'+y=2x+1$

6) $(x-1)^2y''+4(1-x)y'+6y=x$

7) $(x-1)^3y'''-3(x-1)^2y''-6(1-x)y'-6y=\sin\ln x$

03/11/2010 *

Sabitlerin Değişimi metodu

İster sabit katsayılı homojen olmayan ister değişken katsayılı homojen olmayan denklemlerin çözümü için önemli bir metotdur. Başka hiçbir şekilde çözemeyeceğimiz denklemleri bu metotla çözeriz

3. mertebeden denknklem denklem için açıklayalım. Daha yüksek mertebeliler için benzer düşünce 2. mertebeden için özel durumlar söz konusu olacaktır.

$$a_3y'''+a_2y''+a_1y'+a_0y=f(x)$$

Metodun uygulanabilmesi için mutlaka homojen kısmın genel çözümü bulunmalıdır.

$y_{hgç}=y=c_1y_1=c_2y_2=c_3y_3$ olsun

(1)

$c_1 = c_1(x)$
$c_2 = c_2(x)$
$c_3 = c_3(x)$

} bulunacaktır. x'in fonksiyonlarıymış gibi hesaba katacağız. c'leri bulacağız. Bulup yerine yazarsak elde edilecek çözüm söz konusu denklemin genel çözümü olacaktır.

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$

$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' + c_3 y_3' + \underline{c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_3' y_3}$

0 'olmalı

$y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_3 y_3'' + \underline{c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_3' y_3'}$

0' olmalı

$y''' = ______ + \underline{c_1' y_1'' + c_2' y_2'' + c_3' y_3''}$

$\frac{f(x)}{a_3}$ olmalı

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_3' y_3 = 0$$
$$c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_3' y_3' = 0$$
$$c_1' y_1'' + c_2' y_2'' + c_3' y_3'' = \frac{f(x)}{a_3}$$

→ c_1', c_2', c_3' bulunacaklar

$\Rightarrow c_1' = f_1(x) = \frac{dc_1}{dx} \Rightarrow dc_1 = f_1(x)\,dx$

$\boxed{c_1 = F_1(x) + \alpha_1}$ $\Rightarrow y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$ 'den

$\Rightarrow c_2' = f_2(x)$ $\boxed{c_2 = F_2(x) + \alpha_2}$

$\Rightarrow c_3' = f_3(x)$ $\boxed{c_3 = F_3(x) + \alpha_3}$

$$\boxed{y = (F_1(x) + \alpha_1) y_1 + (F_2(x) + \alpha_2) y_2 + (F_3(x) + \alpha_3)}$$

g.ç.

4 ÖR

$y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2x}$

$k^2 + 4 = 0 \rightarrow k_1 = 2i, \quad k_2 = -2i$

$y_{h.g.a.} = y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

$y' = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x + \underbrace{c_1' \cos 2x + c_2' \sin 2x}_{0}$

$y'' = \text{———} \; \text{———} \; \text{———} \underbrace{-2c_1' \sin 2x + 2c_2' \cos 2x}_{\frac{4}{\cos 2x}}$

$2\sin 2x \,/\; c_1' \cos 2x + c_2' \sin 2x = 0 \quad (2\sin^2 x)$

$\cos 2x \,/\; -2c_1' \sin 2x + 2c_2' \cos 2x = \frac{4}{\cos 2x} \quad (\cos 2x)$

$+$

$\rightarrow \underbrace{2c_2' \sin^2 2x + 2c_2' \cos^2 2x}_{2c_2'} = 4$

$\Rightarrow 2c_2' = 4$

$c_2' = 2$

$c_2 = 2x + d_2$

$c_1' \cos 2x + c_2' \sin 2x = 0$, $c_2' = 2$

$\Rightarrow c_1' \cos 2x + 2\sin 2x = 0$

$c_1' = -2\tan 2x$

$\rightarrow c_1 = \ln|\cos 2x| + d_1$

$\Rightarrow y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ 'den

$y = (\ln|\cos 2x| + d_1)\cos 2x + (2x + d_2)\sin 2x$

g.ç.

ÖR

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$$

$$k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 1$$

$$y_{h.g.c.} = y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

$$y' = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x + \underbrace{c_1' e^x + c_2' + x e^x}_{0}$$

$$y'' = \text{________} \underbrace{c_1' e^x + c_2' e^x + c_2' x e^x}_{\frac{e^x}{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1' e^x + c_2' x e^x = 0 \\ c_1' e^x + c_2' e^x + c_2' x e^x = \frac{e^x}{x} \end{array}\right\} \overset{(-)}{\Longrightarrow} c_2' e^x = \frac{e^x}{x}$$

$$c_2' = \frac{1}{x}$$

$$c_2 = \ln x + d_2$$

$$c_1' e^x + c_2' x e^x = 0 \quad (c_2' \to \frac{1}{x})$$

$$c_1' + 1 = 0$$

$$c_1' = -1 \to \boxed{c_1 = -x + d_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = (-x + d_1)e^x + (\ln x + d_2) x e^x} \quad g.c.$$

ÖR

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^{2x}+1}$$

$$k^2 + 3k + 2 = 0 \quad k_1 = -1, \quad k_2 = -2$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

$$y' = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x} + \underbrace{c_1' e^{-x} + c_2' e^{-2x}}_{0}$$

$$y'' = \text{———————} \quad \underline{-c_1' e^{-x} - 2c_2' e^{-2x}}$$

$$\frac{1}{e^{2x}+1}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} c_1' e^{-x} + c_2' e^{-2x} &= 0 \\ -c_1' e^{-x} - 2c_2' e^{-2x} &= \frac{1}{e^{2x}+1} \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$c_1' e^{-x} + c_2' e^{-2x} = 0$$
$$-c_1' e^{-x} - 2c_2' e^{-2x} = \frac{1}{e^{2x}+1}$$

$$-c_2' e^{-2x} = \frac{1}{e^{2x}+1}$$

$$c_2' = -\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$$

$$c_2 = -\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx$$

$$= -\int \frac{e^x \cdot e^x\,dx}{e^{2x}+1}, \quad \left(\begin{aligned} e^x &= t \\ e^x dx &= dt \end{aligned} \right.$$

$$= \int -\frac{t\,dt}{t^2+1} = -\frac{1}{2} \ln|t^2+1|$$

92

$$c_2 = -\frac{1}{2}\ln|e^{3x}+1|$$

$c_1 e^{-x} + c_2' \cdot e^{-2x} = 0 \Rightarrow c_1' = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$

$-\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$

$\hookrightarrow c_1 = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$, $\left(\begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array} \right)$

$$c_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan e^x + d_1$$

$$\Rightarrow y = (\arctan e^x + d_1)e^{-x} + \left(-\frac{1}{2}\ln|e^{2x}+1| + d_2\right)e^{-2x}$$

g.ç.

ÖR $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}\cos e^x$

$k^2 - 3k + 2 = 0 \to k_1 = 1$, $k_2 = 2$

$\Rightarrow y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

$y' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} + \underbrace{c_1' e^x + c_2' e^{2x}}_{0}$

$y'' = \text{________} + \underbrace{c_1' e^x + 2c_2' e^{2x}}_{e^{3x}\cos e^x}$

$\left. \begin{array}{l} c_1' e^x + c_2' e^{2x} = 0 \\ c_1' e^x + 2c_2' e^{2x} = e^{3x}\cos e^x \end{array} \right\} \Rightarrow c_2' e^{2x} = e^{3x}\cos e^x$

$c_2' = e^x \cos e^x$

$c_2 = \int e^x \cos e^x \, dx$, $\left(\begin{matrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{matrix} \right)$

$c_2 = \int \cos t \, dt$

$c_2 = \int \cos t \, dt$

$c_2 = \sin e^x + d_2$

$c_1' e^x + c_2' e^{2x} = 0 \Rightarrow c_1' = -e^{2x} \cos e^x$

$\downarrow$

$e^x \cos e^x$

$c_1 = -\int \underbrace{e^{2x}}_{e^x e^x} \cos e^x \, dx$ $\left(\begin{matrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{matrix} \right)$

$c_1 = -\int t \cos t \, dt$

$\left| \begin{matrix} t = u \\ dt = du \\ dv = \cos t \, dt \\ v = \sin t \end{matrix} \right.$

$c_1 = -\left(t \sin t - \int \sin t \, dt \right)$

$c_1 = -t \sin t + \int \sin t \, dt$

$c_1 = -t \sin t - \cos t + d_1$

$c_1 = -e^x \sin e^x - \cos e^x + d_1$

$\Rightarrow y = \left(-e^x \sin e^x - \cos e^x + d_1 \right) e^x + \left(\sin e^x + d_2 \right) e^{2x}$

g.c.

GIPTA

ÖDEV:

1) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$, $\frac{1}{\cos x}$

2) $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x^2+1}$

3) $y'' - 2y' + y = \frac{e^{x}}{(1-x)^2}$

4) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x} x^{3/2}$

5) $y''' + 3y'' + 3y' + y = \frac{e^{-x}}{x^3}$

6) $y''' - 3y'' + 3y' - y = \sqrt{x}\ e^{x}$

7) $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = \frac{e^{-2x}}{x}$

8) $y'' - y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \tan x$

9) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \cdot \ln x$

ÖR $x^2y'' - 3xy' + 3y = x - 1$ → (Euler çözülebilir)

$x^2y'' - 3y' + 3y = 0$

$y_1 = x$ ö.ç

$y_2 = x \int \frac{e^{+\int \frac{3}{x} dx}}{x^2} dx$

$y_{h.g.ç} = y = c_1 x + c_2 y_2$

$y' = ____ + ____$ (0)

$y'' = ____ + ____$

$\frac{x-1}{x^2}$

Verilen ilk şartlar altında Çözüm Bulma

ÖR $y'' + y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$

$k^2 + 1 = 0 \rightarrow k_1 = i$, $k_2 = -i$

$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ g.ç.

$y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$

$y(0) = 3$, $y'(0) = 2$ için $\Rightarrow$

$y(0) = 3 = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0$ ($\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$)

$\Rightarrow c_1 = 3$

$y'(0) = 2 = -c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0$ ($\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$)

$\Rightarrow c_2 = 2$ $\Rightarrow$ $y = 3\cos x + 2\sin x$

ÖR $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 1$

(Euler)

$x = e^t$

$y' = e^{-t}\dot{y}$

$y'' = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$

$\Rightarrow$ $\ddot{y} - \dot{y} - 2\dot{y} + 2y = 0$

$\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$

$k^2 - 3k + 2 = 0 \rightarrow k_1 = 1$, $k_2 = 2$ $\Rightarrow$

$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

$y' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}$

$y(1) = 3 \quad , y'(1) = 1$ için

$\Rightarrow y(1) = 3 = c_1 e + c_2 e^2$
$y'(1) = 1 = c_1 e + 2c_2 e^2$
$\rightarrow c_2 e^2 = -2$

$c_2 = -2e^{-2}$

$c_1 e + 2c_2 e^2 = 1$'den
$\downarrow$
$-2e^{-2}$

$c_1 e - 4 = 1 \rightarrow c_1 e = 5$

$c_1 = \frac{5}{e}$

$\Rightarrow y = 5e^{-1}(e^x) - 2e^{-2}(e^{2x})$

4
ÖR $y''' + 3y'' - 10y' = 0 \quad , y(0) = 7 \quad , y'(0) = 0 \quad , y''(0) = 0$

$\hookrightarrow k^3 + 3k^2 - 10k = 0 \rightarrow k(k^2 + 3k - 10) = 0$ $\rightarrow k_1 = 0$, $k_2 = 2$, $k_3 = -5$

$2 \quad -5$

$\rightarrow y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-5x}$ g.ç.

$y' = 2c_2 e^{2x} - 5c_3 e^{-5x}$

$y'' = 4c_2 e^{2x} + 25c_3 e^{-5x}$

$y(0) = 7, \; y'(0) = 0, \; y''(0) = 0$ için

$y(0) = 7 = c_1 + c_2 + c_3$

$y'(0) = 0 = 2c_2 - 5c_3$

$y'(0) = 0 = 4c_2 + 25c_3$) → $c_2 = c_3 = 0$, $c_1 = 7$

$\Rightarrow y = 7$

ÖR $y'' + 4y' = 12x^2 + e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

$k^2 + 4k = 0$ → $k_1 = 0$, $k_2 = -4$) ← $k = 0$ 1 katlı kök ; $k = 1$ kök değil

$y_{öç} = y = x(ax^2 + bx + c) + de^x$

$ax^3 + bx^2 + xc$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c + de^x$

$y'' = 6ax + 2b + de^x$

$\Rightarrow 6ax + 2b + 12ax^2 + 8bx + 4c + 5de^x = 12x^2 + e^x$

$12a = 12$ $\quad$ $6a + 8b = 0$

$a = 1$ $\quad$ $b = -\frac{6}{8}$ $\quad$ $2b + 4c = 0$, $5d = 1$

$b = -\frac{3}{4}$ $\quad$ $c = \frac{3}{8}$ $\quad$ $d = \frac{1}{5}$

$y = c_1 + c_2 e^{-4x} + x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{8} + \frac{1}{5}e^x$ g.ç.

$y' = -4c_2 e^{-4x} + 3x^2 - \frac{3}{4} + \frac{1}{5}e^x$

$y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ için

$C_1 = ?$

$C_2 = ?$

Uç Nokta Problemleri, Özdeğerler - Öz fonksiyonlar

1) $y'' + p(x)y' + g(x)y = 0$, $y(a) = 0$ $y'(a) = 0$

2) $y'' + p(x)y + q(x)y = 0$ $y(a) = 0$ $y(b) = 0$

şeklinde verilen bir problem için durumu irdeleyelim. 1 ile 2 arasındaki belirgin fark. 2 denklemi $a<b$ gibi farklı iki noktadan iki şart içeriyor. 2 denkleminde uç noktalarda $y(a)=0$, $y(b)=0$ şartlarını sağlayacak şekilde (a,b) $\underset{a\quad x\quad b}{\longrightarrow}\mathbb{R}$ aralığında çözüm arayacağız. Bu tip bir problem genelde uç nokta veya sınır değer problemleri olarak adlandırılır.

Ör

$y'' + 3y = 0$ $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$

$y_{g.c} = y(x) = c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x$

$y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ için

$y(0) = c_1 \underbrace{\cos\sqrt{3}.0}_{1} + \underbrace{c_2 \underbrace{\sin\sqrt{3}.0}_{0}}_{0} = 0$

$\boxed{c_1 = 0}$ olacak

$y(\pi) = \underbrace{c_1 \cos\sqrt{3}\pi}_{0}$ (c_1 0 idi) $+ c_2 \underbrace{\sin\sqrt{3}\pi}_{\neq 0} = 0$ dan

$\Rightarrow \boxed{c_2 = 0}$ olacak

$\Rightarrow \boxed{y(x) = 0}$ aşikar çözüm

100

ÖR 2) $y''+4y=0$, $y(0)=0$, $y(\pi)=0$

$\rightarrow y_{g.c.} = y(x) = c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x$

$y(0)=0$, $y(\pi)=0$ için

$\Rightarrow y(0) = c_1 \underbrace{\cos 2.0}_{1} + \underbrace{c_2 \underbrace{\sin 2.0}_{0}}_{0} = 0$ 'dan

$\Rightarrow c_1 = 0$ dan

$y(\pi) = \underbrace{c_1 \underbrace{\cos 2\pi}_{\neq 0}}_{0} + c_2 \underbrace{\sin 2\pi}_{0} = 0 \quad \forall c_2 \in \mathbb{R}$ için (c_1: 0 idi)

$y(\pi)=0$ sağlanıyor.

$\Rightarrow y(x) = c_2 \sin 2x \rightarrow$ Aşikar olmayan bir çözüm

şeklinde her fonksiyon her c_2 için hem verilen şartları ve dif. denklemi sağlıyor.

Özdeğerler - öz fonksiyonlar

③ $y'' + p(x)y' + \lambda q(x) y = 0$, $y(a)=0$, $y(b)=0$

denklemini λ'ya göre irdeleyelim.

Eğer $\lambda=3$, $p(x)=0$, $q(x)=1$ ise ($a=0$ $b=\pi$ için) örnek 1 söz konusu olur. $\lambda=4$ içinde örnek 2 söz konusu olur. Örnek 1 ve 2 'den görüldüğü gibi parametre içeren sınır değer problemleri parametrenin özel değerine oldukça bağlı olabiliyor. Genelde de bu durum böyledir. 3 denkleminde de olduğu gibi λ'yı içeren sınır değer problemi bir

öz değer problemi olarak adlandırılır. Öz değer problemlerinde sorulan soru şudur: Hangi λ parametresinin reel değeri için bir sınır değer problemi aşikar olmayan yani 0'dan farklı çözüm verir. Bu şekilde bulunan λ parametresine problemin öz değeri ve karakteristik değeri adı verilir. Bu durumda $\lambda = 4$ değeri $y'' + \lambda y = 0$, $y(0)$, $y(\pi) = 0$ sınır değer probleminin öz değeridir. Örnek 1'de $\lambda = 3$'ün aynı problemin öz değeri olmadığını söyleyebiliriz.

λ_* 3 ifadesi ile verilen problemin öz değeri olsun ve bu λ yerine λ_* değeri konulduğunda elde edilen y_* problemin aşikar olmayan ($\neq 0$) çözümü olsun.

Yani;

$$y_*'' + p(x) y_*' + \lambda_* q(x) y_* = 0 \;, \; y_*(0) = 0 \quad y_*(\pi) = 0$$

Bu durumda y_* değerine λ_* karşılık gelen öz fonksiyon adı verilir. Mesela örnek 2'de $\lambda_* = 4$, öz değer

$y_*(x) = \sin 2x$, $c_2 = 1$ olmalıdır.

öz fonksiyon

Ör 3) $y'' + \lambda y = 0$ $y(0) = 0$ $y(L) = 0$, $(L > 0)$
ile verilen sınır değer problemi için öz değer ve öz fonksiyonlar arayalım.

λ'nın bütün olası reel pozitif, negatif ve sıfır değerlerini göz önüne almalıyız.

1) $\lambda=0$ ise $y''=0$, $y(0)=0$, $y(L)=0$ için

$y_{g.ç} = \boxed{y(x)=c_1(x)+c_2}$

$y(0)=0$, $y(L)=0$ için

$\Rightarrow y(0)=c_1 \cdot 0 + c_2 = 0$ dan

$\boxed{c_2=0}$ olmalı

$y(L)=c_1L+c_2=0$ 'dan (c_2: 0'idi)

$\Rightarrow c_1L=0$ dan $\Rightarrow \boxed{c_1=0}$ olur

$\Rightarrow \boxed{y(x)=0}$ bulunur

Böylece özdeğer ve özfonksiyon yoktur.

2) $\lambda<0$ ise, $\lambda=-\alpha^2$ $(\alpha>0)$ alalım

$\rightarrow y''-\alpha^2y=0$, $y(0)=0$, $y(L)=0$ şeklindedir.

$y_{g.ç} = \boxed{y(x)=c_1e^{\alpha x}+c_2e^{-\alpha x}} = A\,ch\,\alpha x + B\,sh\,\alpha x$ ($A=c_1+c_2$, $B=c_1-c_2$)

ve $y(0)=0$, $y(L)=0$ için

$$ch\,\alpha x=\frac{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}{2}$$

$$sh\,\alpha x=\frac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{2}$$

$\Rightarrow y(0)=\underbrace{A\,ch\,\alpha x.0}_{\neq 0}+\underbrace{B\,sh\,\alpha.0}_{0}=0$ 'dan

$\Rightarrow \boxed{A=0}$ olmalı $y(L)=\underbrace{A\,ch\,\alpha.L}_{0}+\underbrace{B\,sh\,\alpha.L}_{\neq 0}=0$ dan (A: 0 idi)

$\boxed{B=0}$ olmalı

Böylece tek bir çözüm 0 olan aşikar çözümdür.

$\boxed{y(x)=0}$

Dolayısıyla bu durumda da özdeğer ve öz fonksiyondan-da bahsedemiyoruz.

3) $\lambda > 0$ ise $\lambda = \alpha^2$, $(\alpha > 0)$ olsun

$y'' + \alpha^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y(L) = 0$, $(L > 0)$

$y_{g.ç.} = \boxed{y(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x}$

$y(0) = 0$, $y(L) = 0$ için

$\Rightarrow y(0) = c_1 \underbrace{\cos \alpha \cdot 0}_{\neq 0} + \underbrace{c_2 \sin \alpha \cdot 0}_{0} = 0$ 'dan

$\Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$ olsun

$y(L) = \underbrace{c_1 \cos \alpha L}_{0} + \underbrace{c_2 \sin \alpha L = 0}$ 'dan (c_1 0 idi)

↳ ifadesi $c_2 \neq 0$ durumunda da sağlanır. Bu durum sadece αL, π'nin pozitif tam katları olması durumunda da sağlanır.

$\alpha L = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, n\pi$

$\Rightarrow \lambda = \alpha^2 = \frac{\pi^2}{L^2}, \frac{4\pi^2}{L^2}, \frac{9\pi^2}{L^2}, \ldots \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ iseler sağlanır.

$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $(n = 1, 2 \ldots)$ için değer sağlanır.

Böylece λ_n değerlerine öz değerler. Buna karşılık gelen $y_n = \sin \frac{n\pi}{L} x$, $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ öz fonksiyonları söz konusudur. ($c_2 = 1$ olmalıdır)

104.

ÖR 4)

$y'' + \lambda y = 0$, $y(0)=0$ $y'(L)=0$, $(L>0)$

$\alpha > 0$ olmak üzere $\lambda = \alpha^2$ alalım

Bu durumda

$y'' + \alpha^2 y = 0$, $y(0)=0$ $y'(L)=0$

$y_{gç} = \boxed{y(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x}$

$y(0)=0$, $y'(L)=0$ için

$\Rightarrow y(0) = c_1 \underbrace{\cos \alpha . 0}_{1} + \underbrace{c_2 \sin \alpha . 0}_{0} = 0$ dan

$\boxed{c_1 = 0}$ olur.

$y(x) = c_2 \sin \alpha x$

$y' = c_2 \alpha \cos \alpha x \rightarrow y'(L)$ için $\Rightarrow y'(L) = c_2 \alpha \cos \alpha L = 0$ dan

$\hookrightarrow c_2 \neq 0$ ikende sağlanır.

αL, $\frac{\pi}{2}$'nin pozitif tek katları olması durumundada sağlanır.

$\alpha L = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots \frac{(2n-1)\pi}{2}, \ldots$

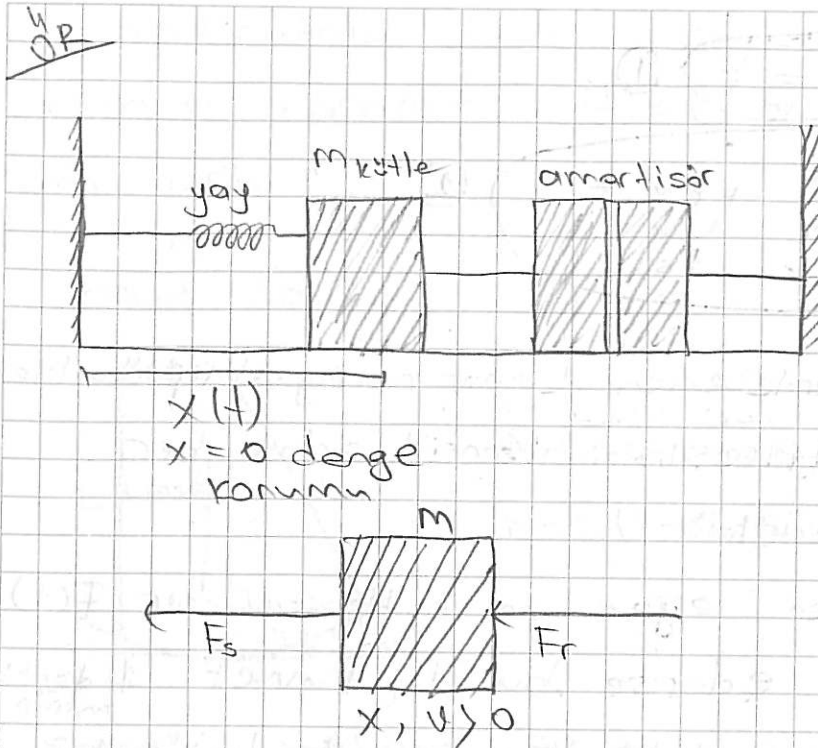
$\lambda = \alpha^2 = \frac{\pi^2}{4L^2}, \frac{9\pi^2}{4L^2}, \ldots (2n-1)\frac{\pi^2}{4L^2}, \ldots$ de sağlanır.

Böylece

$\lambda_n = (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4L^2}$, $(n = 1, 2, \ldots)$

$y_n(x) = \sin (2n-1)\frac{\pi}{2L} x$, $\left(\begin{matrix} n = 1, 2 \ldots \\ c_2 = 1 \text{ olacak} \end{matrix} \right)$ değer alır.

Ör



m kütleli bir cisme etki eden kuvvetlerin yönleri

Bir m kütleli cisim kendisine bir Fs kuvvetiyle uygulayan bir yaya ve hemde kendisine Fr kuvvetiyle etki eden bir amortisöre bağlansa yayın Fs tepki kuvvetinin denge konumundan itibaren kütlenin yer değiştirmesi ile (Sağa doğru pozitif sola doğru negatif) orantılı olduğunu ve amortisörün uyguladığı Fr kuvvetinin kütlenin $v = \frac{dx}{dt}$ hızı ile orantılı olduğunu varsayalım. 2. şekil yardımıyla bu iki kuvvetin uygun etki yönünü şöyle ifade edelim.

$F_s = -kx$, $F_r = -cv$, ($c > 0$ sönüm sabiti, $k > 0$ yay sabiti)

$F_r = -cv$ kütlenin hareketinde hava direncini içeren sistemdeki sürtünme kuveti olarak bakabiliriz. x pozitif iken F_s negatif v pozitif iken F_r negatiftir.

$F = ma$, newton kanunundan

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_s + F_r = F \quad (1)$$

$$\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{c\frac{dx}{dt}}_{F_r} + \underbrace{kx}_{F_s} = 0 \quad (2)$$

Böylece bu 2. mertebeden Lineer homojen dif. denklem kütlenin serbest titreşimini temsil eden bir matematiksel modeldir.

F_r, F_s'ye ilaveten eğer m kütlesine bir $F(t)$ dış kuvveti etki ederse bu dış kuvvet 1 denkleminin sağ tarafına eklenmelidir. Böylece 2 denklemi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad (3)$$ olur.

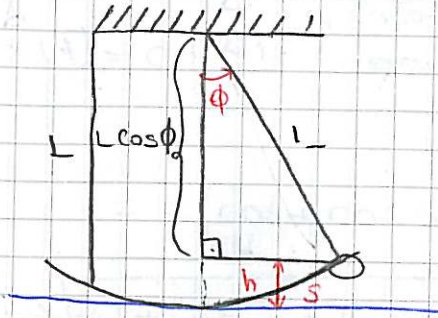
3 numaralı Bu denklem $F(t)$ dış kuvveti etkisindeki bir kütlenin zorlanmış titreşimini temsil eder. Şekil 1'de cismin bulunduğu konum ile denge konumu yayın gerilmemiş durumunda cismin konumu arasındaki uzaklığı x ile gösterilir. Yay gerilirken $x>0$ yay sıkıştırılırken $x<0$ olur. Hooke kanununa göre yayın kütleye uyguladığı güçlendirilmiş F_s kuvveti yayın sıkıştırıldığı veya gerildiği x uzaklığı ile orantılıdır. Yani

$F_s = -kx$, $(k>0)$ Amortisör yok ise ve bütün sürtünme kuvvetleri ihmal edilirse. Bu durumda $c=0$ demektir. Böyle harekete sönümsüz hareket. $c>0$ ise harekete sönümlü hareket adı verilir.

3 denkleminde $F(t)=0$ bu durumda harekete serbest hareket $F(t)\neq 0$ zorlanmış hareket adı verilir.

25/11/2010

Basit Sarkaç



$h = L - L.\cos\theta$

$h = L(1-\cos\theta)$

Şekilde görüldüğü gibi t uzunluğunda bir ipin ucuna daha sonra kütlesiz bir çubuğa bağlı sağa sola salınan bir m kütlesinden oluşan basit sarkaç ele alalım θ ve yönü şekildeki gibi olsun.

$\theta = \theta(t)$ Bu durumda kütlenin konum denklemini belirlemek için bir matematiksel model oluşturalım

$S = L.\theta$

Böylece kütlenin hızı için $v = \frac{ds}{dt} = L.\frac{d\theta}{dt}$ yazarız

Kütlenin kinetik enerjisi $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

Potansiyel enerjisi ise $V = mgL(1-\cos\theta)$

Mekanik enerjinin korunumu kanununa göre $T+V = C =$ sabit

$$\frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgL(1-\cos\theta) = C = \text{sabit}$$

↳ t

$$mL^2\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) + mgL\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$$

$$mL^2 \frac{d\theta}{dt}\left(\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + k\sin\theta = 0}, \quad \left(k = \frac{g}{L}\right)$$

$$\sin\theta \approx \theta, \quad c\frac{d\theta}{dt}$$

Ortamın sürtünme denklemine karşılık gelen $c\frac{d\theta}{dt}$ terimide hesaba katılırsa

$$\boxed{\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + c\frac{d\theta(t)}{dt} + k\theta(t) = 0}$$

Ör serbest sönümsüz hareket

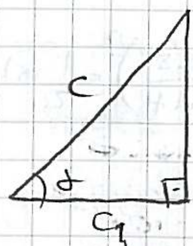
ne sönümlü ne de dış kuvvet etkisi olan bir yaya bağlı kütleye sahipsek $m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$

denklemi $m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$ olurki şeklini alır.

Genellikle $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ alır. $mx'' + kx = 0$ denklemi

$x'' + w_0^2 x = 0$ şeklinde yeniden ifade edilir.

Bu denklemi irdelersek $x_{gç} = \boxed{x(t) = c_1\cos w_0 t + c_2\sin w_0 t}$



Bu çözümün açıkladığı hareketi analiz etmek için c ve α sabitini

$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $\cos\alpha = \frac{c_1}{c}$ $\quad \sin\alpha = \frac{c_2}{c}$

olacak şekilde şekilde de görüldüğü gibi seçelim.

Burada c_1 veya c_2 veya her ikiside negatif olabilir.

$$\alpha = \begin{cases} \arctan\frac{c_2}{c_1} \Rightarrow \tan x \frac{c_2}{c_1}, & c_1 > 0 \quad c_2 > 0 \text{ (Birinci bölge)} \\ \pi + \arctan\frac{c_2}{c_1}, & c_1 > 0 \text{ (2. veya 1. Bölge)} \\ 2\pi + \arctan\frac{c_2}{c_1}, & c_1 > 0 \quad c_2 < 0 \text{ (4. Bölge)} \end{cases}$$

GIPTA

Burada $\arctan \frac{c_2}{c_1}$, $(-\pi/2 \,,\, \pi/2)$ aralığında da hesaplanabilir.

Her durumda $X(t) = c_1 \cos w_0 t + c_2 \sin w_0 t$ ve

$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ $\cos\alpha \frac{c_1}{c}$ $\sin\alpha \frac{c_2}{c}$ den

$$X(t) = c\left(\overset{\cos\alpha}{\frac{c_1}{c_2}} \cos w_0 t + \overset{\sin\alpha}{\frac{c_2}{c_1}} \sin w_0 t\right)$$

$$= c(\cos\alpha \cos w_0 t + \sin\alpha \sin w_0 t)$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = c\cos(w_0 t - \alpha)}$$

Böylece kütle denge durumunda iken:

1) Genlik c,

2) Dairesel frekans w_0 ve

3) Faz açısı α

olmak üzere ileri geri salınım yaparak bu tip hareketler basit harmonik hareketler olarak adlandırılır.

ÖR $m = \frac{1}{2}$ kg kütleli bir cisim 100 Newtonluk bir kuvvetle 2 metre gerdirilmiş bir yayın ucuna bağlanmış. Başlangıç konumu $y_0 = 1$ m başlangıç hızı $V_0 = -5$ m/s ile harekete başlatılıyor. Bu başlangıç şartlarının anlamı $t=0$ anında cisim sağ tarafa yerleştirilmiş olup sola doğru hareket ediyor. Böyle bir cismin konum fonksiyonunu bulun.

Yay sabiti $k = \frac{100\,N}{2m} = 50\,N/m$ 'dir.

$\frac{1}{2}x'' + 50x = 0$, $(c = 0)$

$x'' + 100x = 0$

$\to x_{g.c}(t) = x(t) = c_1\cos 10t + c_2 \sin 10t$

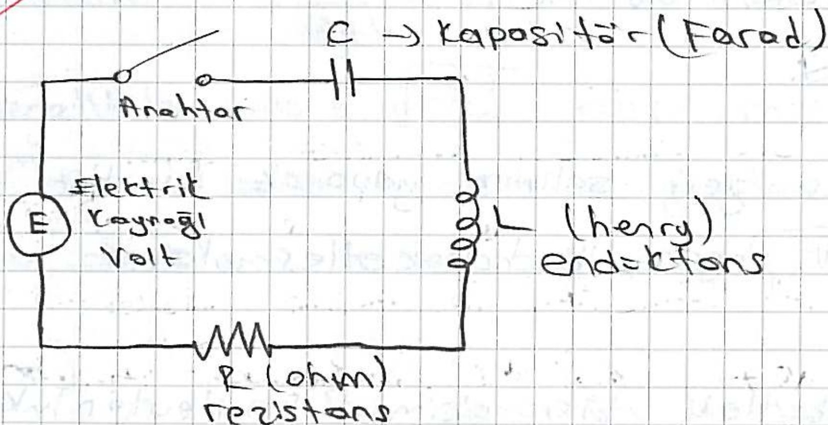
$x'(t) = -10c_1 \sin 10t + c_2\cos 10t$

$x_0 = x(0) = 1m \quad x'(0) = v_0 = \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = -5m/s$

$c_1 = 1, \quad c_2 = -\frac{1}{2}$ bulunur.

$x(t) = \cos 10t - \frac{1}{2}\sin 10t$

ÖR



RLC seri devresi

Böyle bir devre için $L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t)$

denklemi geçerlidir. $\frac{dQ}{dt} = I(t) \longrightarrow LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t)$

Devre elemanı	Voltaj Geçişi
indüktör	$L\frac{dI}{dt}$
Rezistans	RI
kapositör	$\frac{1}{C}Q$ (coulomb)

① $LQ'' + RQ' + \frac{1}{C} Q = E(t)$ denkleminde voltaj $E(t)$'nin bilindiği kabul ediliyor. Bir çok pratik problemde Q şarjından ziyade $I(t)$ akım şiddeti önemli olduğundan ① de Q yerine I yazarsak

Elek. $$LI'' + RI' + \frac{1}{C} I = E'(t)$$ elde ederiz

Mekanik sistem	Elektriksel sistem
Kütle	indüksiyon (L)
Sönüm katsayısı c	Rezistans (R)
yay sabiti	Ters kapasitör $\left(\frac{1}{C}\right)$
konum (pozisyon)	Şarj elektrik kuvveti
Kuvvet F	Elektrik kuvveti E veya I

Mek. $$mx'' + cx' + kx = F(t)$$

ÖR Sönümsüz zorlanmış salınımlar

$F(t) = F_0 \cos wt$ dış kuvveti altında sönümsüz zorlanmış harmonik hareketi ele alalım. Genel $mx'' + cx' + kx = F(t)$ denklemi ile verilen ifadeler $c = 0$ (sönümsüz) alınırsa $mx'' + kx = F_0 \cos wt$ denklemi söz konusu olur. Bu denklemin çözümünü ele alalım.

$$x_{h.g.ç}(t) = x(t) = c_1 \cos w_0 t + c_2 \sin w_0 t \quad , \quad \left(w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\right) \text{'dır.}$$

(Kütle yay sisteminin dairesel doğal frekansı.)

Dış ve doğal frekansların eşit olmadığını varsayalım yani $w \neq w_0$ olsun.

$$x_{öç}(t) = x(t) = a \cos wt + b \sin wt$$

$x'(t) = -aw\sin wt + bw\cos wt$

$x''(t) = -aw^2\cos wt - bw^2\sin wt$

$b = 0 \quad , \quad a = \dfrac{F_0}{k - mw^2} = \dfrac{F_0/m}{w_0^2 - w^2}$

Sonuç olarak

$x(t) = x_{hgç} + x_{öç}$

$$x(t) = c_1\cos w_0 t + c_2 \sin w_0 t + \frac{F_0/m}{w_0^2 - w^2}\cos wt$$

şeklinde olur.

$$x(t) = c(\cos w_0 t - \alpha) + \frac{F_0/m}{w_0^2 - w^2}\cos wt$$

şeklinde de yazabiliriz.

Sonuçta elde edilen hareketin doğal dairesel frekansı w_0 ve dış kuvvet frekansı w olan 2 salınımın üstüste eklenmesi olduğu görülür.

ÖR

$m = 1 \quad , \quad k = 9 \quad f_0 = 80 \quad w = 5$ için

$mx'' + kx = F_0\cos wt$ den $x'' + 9x = 80\cos 5t$ olan

$$= x'' + 9x = 8\cos 5t$$

$x(0) = x'(0) = 0$ ise

$x(t) = ?$

Burada doğal frekans $w_0 = \sqrt{\dfrac{9}{1}} = 3$

Dış kuvvetin frekansı konuda belirttiğimiz gibi eşit değildir.

$x'' + 9x = 80\cos 5t$

↳ $x_{h.g.ç} = x(t) = c_1\cos 3t + c_2 \sin 3t$

$x_{ö.ç.} = x(t) = a\cos 5t + b\sin t$ 'den $a = -5$, $b = 0$ olur.

Böylece genel çözüm,

$x(t) = x_{h.g.ç} + x_{ö.ç}$ 'den

$x(t) = 5\cos 3t - 5\sin 5t$

Seriler Yardımıyla Dif. Denklem Çözümü

Bu metod daha ziyade 2. mertebeden değişken katsayılı lineer özellikle de polinom katsayılı difransiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılır. Böyle bir çözüm için genel anlamda

$P_2(x)y'' + P_1(x)y' + P_0(x)y = 0$

şeklindeki dif. denklemi söz konusu olur. Bu denklemi diğer bir ifade ile $y'' + \frac{P_1}{P_2}y' + \frac{P_0}{P_2}y = 0$

01/12/2010

$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$ (1) $P_i(x)$'ler polinom

$y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$ (2) $P(x)$ $q(x)$'ler polinom olmayabilir.

Serilerle denklem çözümlerinin $x = x_0$ gibi noktalarda arayacağız. Noktaları durumlarına göre şu tanımları verelim.

Tanım Eğer $x = x_0$ (1) denkleminde $P_0(x) = 0$'ın kökü değil ise veya (2) denkleminde $P(x)$ $q(x)$ ifadelerinin taylor serisine açılabildiği bir nokta ise bu tür noktaya dif. denkleminin ADİ NOKTASI (Teki) denir.

Tanım: $x = x_0$, $P_0(x) = 0$'ın kökü ise veya $P(x)$, $q(x)$ ifadelerinin taylor serisine açılamadığı bir nokta ise bu noktaya dif. denkleminin AYKIRI NOKTASI (singuler) denir.

Adi Nokta Civarında Çözümler

Adi nokta civarında çözümleri $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ taylor serisi yardımıyla arayacağız ve çözümlerimizi $x_0 = 0$ noktasında ele alacağız. Böylece seri

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

şeklinde olacaktır.

$x^2 y'' + x y' - 2y = 0$ için $x_0 = 0$ bir aykırı noktadır.

$y'' + \frac{1}{x} y' - y = 0$ için $x_0 = 0$ " " "

$y'' + \ln x \, y' + 3y = 0$ için $x_0 = 0$ " " "

$y'' + x^2 y' - xy = 0$ için $x_0 = 0$ bir adi noktadır.

$y'' - y' + xy = 0$ için $x_0 = 0$ " " "

ÖR $y'' - xy' - 2y = 0$ denklemini çözelim.

$x_0 = 0$ civarında çözelim. Bir adi noktadır.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n \equiv 0$$

($n \to n+2$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\underbrace{(n+1)(n+2) a_{n+2} - n a_n - 2 a_n}_{0 \text{ olmalı}} \Big) x^n = 0 = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^n + \ldots$$

$$\Rightarrow (n+1)(n+2) a_{n+2} \underbrace{- n a_n - 2 a_n}_{-(n+2) a_n} = 0 \Rightarrow \boxed{a_{n+2} = \frac{a_n}{n+1}}$$

Genel indergeme formülü katsayıları bulunmaya yarar a_0, a_1 keyfi

Tekler için

$n = 1$ için

$a_3 = \dfrac{a_1}{2}$ $\qquad a_7 = \dfrac{a_5}{6}$

$a_5 = \dfrac{a_3}{4}$ $\qquad a_{2n+1} = \dfrac{a_{2n-1}}{2n}$

$$\boxed{a_{2n+1} = \frac{a_1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)}}$$

Çiftler için

$n=0$ için

$$a_2 = \frac{a_0}{1}$$

$$a_4 = \frac{a_2}{3}$$

$$a_6 = \frac{a_4}{5}$$

$$\vdots$$

$$a_{2n} = \frac{a_{2n-2}}{2n-1}$$

$$a_{2n} = \frac{a_0}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$$

$$y = \left(a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots a_{2n+1} x^{2n+1}\right) +$$

$$+ \left(a_0 x + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \cdots a_{2n} x^{2n} + \cdots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y = a_1 \left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2 \cdot 4} + \frac{x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} + \cdots\right) +$$

→ y_1 özel çözüm

$$+ a_0 \left(1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1 \cdot 3} + \frac{x^6}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{x^8}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots + \frac{x^{2n}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} + \cdots\right) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

y_2 özel çözüm

g.ç.

g.ç.

Bu çözüm y_1 y_2 serilerinin yakınsaklık aralığındaki x değerleri için geçerlidir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|x\text{'li}\right| < 1$$ yakınsaklık olsun (D'Alembert oran testi)

u_n

$? < x < ?$

$$y_1 = c_1 \sum_{n=0} \frac{x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n)} \rightarrow \ldots \quad y_2 = 1 + \sum_{n=}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)} \rightarrow \ldots$$

($2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n) = 2^n \cdot n!$)

Ör. $(x^2+1)y'' + xy' - y = 0$ denklemini seriler yardımıyla çözelim.

$x_0 = 0$ civarında çözelim

$x_0 = 0$ adi noktadır. $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv 0$$

($n \rightarrow n+2$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big[\underbrace{(n+1)(n+2)a_{n+2} + n(n-1)a_n + na_n - a_n}_{0 \text{ olmalı}} \Big] x^n \equiv 0$$

$$\Rightarrow (n+1)(n+2)a_{n+2} + n(n-1)a_n + \underbrace{na_n - a_n}_{(n-1)a_n} = 0 \Rightarrow$$

$(n-1)(n+1)a_n$

GIPTA

$\Rightarrow \boxed{a_{n+2} = \frac{(n-1)a_n}{n+2}}$ genel indirgeme denklemi

a_0, a_1 keyfi

Tekler için

$a_3 = \frac{-(1-1)a_1}{3} = 0$

$a_5 = \frac{-(3-1)a_3}{5} = 0$ (a_3 → 0 idi)

$a_7 = \frac{-(5-1)\overset{\text{0 idi}}{a_5}}{7} = 0$

⋮

$\boxed{a_{2n+1} = 0}$ olur

Çiftler için

$a_2 = \frac{1 \cdot a_0}{2} = \frac{a_0}{2}$

$a_4 = \frac{-1\, a_2}{4}$

$a_6 = \frac{-3\, a_4}{6}$

$a_8 = \frac{-5\, a_6}{8}$

⋮

$a_{2n} = \frac{-(2n-3) \cdot a_{2n-2}}{2n}$

x ______ x ______

$$a_{2n} = \frac{(-1)^{n+1} 1.3.5 \ldots (2n-3)\, a_0}{2.4.6.8 \ldots (2n)}$$

$2.4.6.8\ldots(2n) \to 2^n . 2!$ $\quad (n = 1, 2 \ldots)$

$$y = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + \ldots + a_{2n+1} x^{2n+1} + \ldots) +$$

$$+ (a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \ldots a_{2n} x^{2n} + \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Rightarrow y = \overset{c_1}{a_1} x + \overset{c_2}{a_0} \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1x^4}{2^2 . 2!} + \frac{1.3x^6}{2^3 . 3!} - \frac{1.3.5.x^8}{2^4 . 4!} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{n+1} . 1.3.5 \ldots (2n-3)}{2^n . n!} x^{2n} + \ldots \right) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

g.c. $\quad$ g.c.

$y_1 = x$ için $|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$

$$y_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 1.3.5 \ldots (2n-3)}{2^n . n!} x^{2n}$$

u_n

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

4
ÖR $y'' + y = 0$ denklemini seri yardımıyla çözelim

$x_0 = 0$, adi nokta

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$y' = ___$

$y'' = ___$

$$\Rightarrow \sum_{\underset{y_{n+2}}{n=2}}^{\infty} n(n-1) a_n x^{\overset{\nearrow n+2}{n-2}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} + a_n \right] x^n \equiv 0$$

0 olmalı

$$\Rightarrow \boxed{a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+1)(n+2)}}$$

Tekler için

$$a_3 = \frac{-a_1}{2 \cdot 3}$$

$$a_5 = \frac{-a_3}{4 \cdot 5}$$

$$a_7 = \frac{-a_5}{6 \cdot 7}$$

⋮

$$a_{2n+1} = \frac{-a_{2n-1}}{2n(2n+1)}$$

$\times$ $\times$

$$a_{2n+1} = \frac{(-)^n a_1}{\underbrace{1.2.3.4.\ldots 2n(2n+1)}_{(2n+1)!}} \quad (n=1,2\ldots)$$

çiftler için

$$a_2 = \frac{-a_0}{1.2}$$

$$a_4 = \frac{-a_2}{3.4}$$

$$a_6 = \frac{-a_4}{5.6}$$

$$\vdots$$

$$a_{2n} = \frac{-a_{2n-2}}{(2n-1)2n}$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{\underbrace{1.2.3.4\ldots(2n)}_{(2n)!}} \quad (n=1,2,3\ldots)$$

$$y = (a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \ldots + a_{2n+1} x^{2n+1} + \ldots) +$$

$$+ (a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \ldots + a_{2n} x^{2n} + \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y = \underset{\downarrow\, c_1}{a_1} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right)$$

$$+ \underset{\downarrow\, c_2}{a_0} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right)$$

g.c.

$$\Rightarrow y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

GIPTA

02/12/2010

ÖR $y'' + xy = 0$ seri yardımsız çözülmez.

$y' + xy = 0$ seri yardımsız çözülür.

$$\frac{y'}{y} = -x$$

$$\ln y = -\frac{x^2}{2} + \ln c$$

$$\boxed{y = ce^{-\frac{x^2}{2}}} \text{ g.ç.}$$

seri ile

$(x_0 = 0$ da$)$
aykırı nok.

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \equiv 0$$

ÖR $y' + xy = 0$, $x_0 = 0$ da çözelim.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 \ldots a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 + \ldots + (n-1)a_{n-1} x^n +$$

$$n a_n x^{n-1} + \ldots$$

$\rightarrow y' + xy = 0$ için $\rightarrow a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 + \ldots$
$+ a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + a_4 x^5 + a_5 x^6 + a_6 x^7 + \ldots \equiv 0$

$$\Rightarrow a_1 + \overbrace{(2a_2 + a_0)}^{0} x + \overbrace{(3a_3 + a_1)}^{0} x^2 + \overbrace{(4a_4 + a_2)}^{0} x^3 + \overbrace{(5a_5 + a_3)}^{0} x^4 +$$
$$+ \underbrace{(6a_6 + a_4)}_{0} x^5 + \ldots \equiv 0$$

$\Rightarrow a_1 = 0 \qquad a_2 = -\frac{a_0}{2} \qquad a_3 = \frac{-a_1}{3} = 0 \qquad a_3 = 0$

$a_4 = \frac{-a_2}{4} = \frac{a_0}{2.4} \qquad a_5 = \frac{-a_3}{5} = 0$

$a_4 = \frac{a_0}{2.4} \qquad a_5 = 0$

$a_6 = \frac{-a_4}{6} = \frac{-a_0}{2.4.6}$

$a_{2n+1} = 0$

Çiftler için

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{\underbrace{2.4.6\ldots(2n)}_{2^n \cdot n!}} = \frac{(-1)^n a_0}{2^n \cdot n!}$$

$$y = a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2.1!} + \frac{x^4}{2^2.2!} - \frac{x^6}{2^3.3!} + \frac{x^8}{2^4.4!} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{2^n \cdot n!} + \ldots\right)$$

$a_0 \to c$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n \cdot n!}$$

g.ç.

$$y = c e^{-\frac{x^2}{2}}$$

g.ç.

ÖDEV

$y' + x^2 y = 0$

$y' - x^2 y = 0$) seri yardımıyla çöz.

$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n . n!}$ (u_n) için $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+2}}{2^{n+1} n!(n+1)} \cdot \frac{2^n . n!}{x^{2n}} \right|$

$= x^2 \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(n+1)}}_{0} = x^2 . 0 < 1$ olmalı ki seri yakınsak olur.

$\Rightarrow x^2 < \frac{1}{0} \to \infty \to x^2 < \infty \Rightarrow -\infty < x < \infty$

$\to \forall \in \mathbb{R}$ için y_1 yakınsaktır.

Dif. Denklem Sistemleri

1. Mertebeden Sistemler

Bağımlı değişkenlerin en yüksek mertebeden türevleri t'nin ve daha küçük mertebeden türevlerinin açık fonksiyonları olarak çözülebilen dif. denklemlerin çözümünü ele alalım. Mesela 2 tane 2. mertebeden denklemin bir sistemi durumunda kabulümüz;

$x_1'' = f_1(t, x_1, x_2, x_1', x_2')$

$x_2'' = f_2(t, x_1, x_2$

şeklinde yazılabilmesidir. Böyle yüksek mertebeden herhangibir sistemin 1. mertebeden eşdeğer bir sisteme dönüştürülebilir olması onun hem pratik hemde

teorik önemini gösterir. Bu dönüşümün nasıl gerçekleştirildiğini tanımlamak için önce

$x^{(n)} = f(t, x, x', ---, x^{(n-1)})$ ② şeklinde sadece n. mertebeden bir tek denklemden oluşan sistemi ele alalım. $x_1, x_2, --- x_n$, $(x_i = x_i(t))$ bağımlı değişkenlerini şöyle tanımlayalım.

$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad x_3 = x'', \quad x_n = x^{(n-1)}$ ③

$x_1' = x', \; x_2' = x'' = x_3,$ ___ bu şekilde devam ettiğini görürüz. Burada ③'ün ②'de yerine konmasıyla n tane 1. mertebeden denklemden oluşan

$x_1' = x_2$

$x_2' = x_3$

$\vdots$

$x_{n-1}' = x_n$

$x_n' = f(t, x_1, x_2 \,--\, x_n)$ ④ sistemi elde edilir.

Bu sistem ②'deki orjinal n. mertebeden denkleme eşdeğerdir. Bunun anlamı $x(t)$'nin ② denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart ③'de tanımlanan $x_1(t), x_2(t), x_3(t) ---, x_n(t)$ fonksiyonlarının ④'deki sistemi sağlamasıdır.

Ör

$x = x(t)$ için

$x''' + 3x'' + 2x' - 5x = \sin 2t$ denklemini sisteme çevirelim. Denklemini ② formunda,

$x''' = f(t, x, x', x'') = -3x'' - 2x' + 5x + \sin 2t$
$= 5x - 2x' - 3x'' + \sin 2t$

Buradan $x_1 = x$, $x_2 = x' = x_1'$, $x_3 = x'' = x_2'$

konumuyla 3 tane 1. mertebeden sistemden oluşan

$x_1' = x_2$
$x_2' = x_3$
$x_3' = 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + \sin 2t$ sistemi elde edilir.

Bu sistemi çözmek ① denklemini çözmekle aynıdır. ①'in çözümünü ise iyi biliyoruz. Buradaki fayda mesela $x'' = x^3 + (x')^3$ gibi lineer olmayan denklemlerin çözümündeki zorlukları aşmak içindir.

Ör

2. mertebeden denklem sistemi

$2x'' = -6x + 2y$
$y'' = 2x - 2y + 40 \sin 3t$ } ① ($x = x(t)$, $y = y(t)$)

olsun. Bu sistemi 1. mertebeden eşdeğer sisteme dönüştürelim. Bunun için $x_1 = x$, $x_2 = x' = x_1'$, $y_1 = y$, $y_2 = y' = y_1'$ diyelim. Böylece ① sistemi

$x_1' = x_2$
$2x_2' = -6x_1 + 2y_1$

GIPTA

$y_1' = y_2$

$y_2' = 2x_1 - 2y_1 + 40\sin 3t$ sistemi olur.

2 Boyutlu Basit Sistemler

2. mertebeden lineer (sabit katsayılı + bağımsız değişkenli)

$x'' + px' + qx = 0$ (1) denklemini

$x' = y$, $x'' = y'$ konumuyla

$x' = y$
$y' = x'' = -qx - py$ (2) 2 boyutlu lineer sisteme dönüştü. (1) ve (2) çözümleri aslında aynıdır.

ÖR

$x' = -2y$

$y' = \dfrac{x}{2}$

2 boyutlu sistemini çözmeye

$x'' = -2y' = -2\left(\frac{x}{2}\right) = -x$ gözlemi ile başlayalım. Bu durum 2. mertebeden $x'' + x = 0$ denklemine dönüşmüş olur. Bunun da genel çözümü

$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$

veya $x(t) = c\cos(t - \alpha)$

Burada ($c_1 = c\cos\alpha$, $c_2 = c\sin\alpha$)

Böylece $\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2}x'(t) = -\frac{1}{2}(-c\sin t + c_2\cos t)$

veya

$y(t) = \frac{1}{2}c\sin(t - \alpha)$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x(t) &= c\cos(t-\alpha) \\ y(t) &= \frac{1}{2}c\sin(t-\alpha) \end{aligned}\right\} \text{için}$$

$$\Rightarrow \cos(t-\alpha) = \frac{x(t)}{c}$$

$$\sin(t-\alpha) = \frac{y(t)}{\frac{1}{2}c}$$

$$\frac{x^2(t)}{c^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2(t)}{c^2} + \frac{y^2(t)}{\left(\frac{c}{2}\right)^2} = 1} \rightarrow \text{Elips Ailesi}$$

ÖR

$$\left.\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= 2x+y \end{aligned}\right\} \text{sisteminin genel çözümünü bulalım.}$$

$$x'' = y' = 2x+y = x'+2x$$

$$\Rightarrow x'' - x' - 2x = 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}} \text{ ve}$$

$$y = x'\text{den } \boxed{y(t) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t}}$$

g.ç.

08/12/2010

Genel Anlamda Dif. Denklem sistemlerinin çözümü

Ele alacağımız sistemler sabit katsayılı homojen ve homojen olmayan olacak. Bilinmeyen sayısı ile denklem sayısı eşit olacak sistemde katsayılar determinantı 0'dan farklı olacak

$D^n = \frac{d^n}{dt^n}$

$D^n f(x) = \frac{d^n}{dt^n} f(x) = f^{(n)}(x)$

$D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$, $D^2(e^{3t}) = \frac{d^2}{dt^2}(e^{3t}) = 9e^{3t}$

$D^n \rightarrow$ duruma göre sabitmiş gibi hesaba katılacak duruma göre de D^n operatör olarak devrede olacak

$D^n \rightarrow 2D^3, -3D^2, ___, D3$???

$D^n \rightarrow D^2(e^{2t})$ ✓ $e^{2t}D^2$???

ÖR

$x = x(t)$
$y = y(t)$
$z = z(t)$

$L_1(D)x + L_2(D)y + L_3(D)z = f_1(t)$
$M_1(D)x + M_2(D)y + M_3(D)z = f_2(t)$
$N_1(D)x + N_2(D)y + N_3(D)z = f_3(t)$

$L_i(D)$, $M_i(D)$, $N_i(D)$, $1 \leq i \leq 3$ D'ye bağlı polinomlar.

Ör/ D, $L_1(D) = D^3 - 2D^2 + 3D - 1$
$M_2(D) = -3D + 2$
$N_2(D) = -5$
} polinomlardır.

Sistem çözümünü gramer metoduna göre yapacağız.

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \end{vmatrix} = (___) \rightarrow$$

katsayılar determinantıdır. D'nin bir polinomudur. (Sonuç)

Bu polinomun derecesi sistemin mertebesini belirler. Yani sistemin genel çözümünde kaç parametre kullanacağımızı ifade eder. (Bu determinant açılırken değer sabit bir sayıymış gibi rol oynayacaktır.)

Çözüm grammere göre;

$$\Delta x(t) = \begin{vmatrix} f_1 & L_2 & L_3 \\ f_2 & m_2 & m_3 \\ f_3 & N_2 & N_3 \end{vmatrix} = (___) \rightarrow$$

→ Bu determinant açılırken D operatör olarak devrede olur.
→ Sonuç t'nin bir fonksiyonu olur.

Bu determinant açılırken D operatör olarak devrede olur.

$\Delta x(t) = ___$ 'den $x(t)$ bulunur.

$$\Delta y(t) = \begin{vmatrix} L_1 & f_1 & L_3 \\ m_1 & f_2 & m_3 \\ N_1 & f_3 & N_3 \end{vmatrix} = (___) \rightarrow ___ y(t) \text{ bulunur.}$$

$\Delta y(t) = ___$ (çözülür)

$$\Delta z(t) = \begin{vmatrix} L_1 & L_2 & f_1 \\ M_1 & M_2 & f_2 \\ N_1 & N_2 & f_3 \end{vmatrix} \to ____ = (____) \to ____ - z(t) \text{ bulunur.}$$

$\Delta z(t) = ____$ (çözülür)

Bilinmeyenler çözülürken sabitleri nasıl kullanacağımızı gösterelim.

ÖR

$x' = y$
$y' = 2x + y$ } sistemini çözelim

$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x + y$$
$\to$ $Dx - y = 0$
$-2x + (D-1)y = 0$ } $\to$

$$\to \Delta = \begin{vmatrix} D & -1 \\ -2 & D-1 \end{vmatrix} = D^2 - D - 2 \quad (1.4) - (2.3)$$

Denklemli bu sistem 2. mertebedendir. (Derece mertebeyi veriyor)

$$\Delta x(t) = (D^2 - D - 2)x(t) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & D-1 \end{vmatrix} = D(0) - 0.1 - (0.(-1))$$
$$= 0 - 0 + 0$$
$$= 0$$

$(D^2 - D - 2)x(t) = 0$

$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \frac{dx(t)}{dt} - 2x(t) = 0$

$k^2 - k - 2 = 0 \rightarrow k_1 = -1, \; k_2 = 2 \Rightarrow x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$

$\Delta y(t) = (D^2 - D - 2)\,y(t) = \begin{vmatrix} D & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = D(0) + 2 \cdot 0 = 0 + 0$

$(D^2 - D - 2)\,y(t) = 0$

$\rightarrow y(t) = c_3 e^{-t} + c_4 e^{2t}$

$k^2 - k - 2 = 0 \rightarrow k_1 = -1, \; k_2 = 2$

$Dx - y = 0$ dan için $\rightarrow -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} - c_3 e^{-t} - c_4 e^{2t} \equiv 0$

$-(c_1 + c_3)e^{-t} + (2c_2 - c_4)e^{2t} \equiv 0 = 0 \cdot e^{-t} + 0 \cdot e^{2t}$

$c_1 + c_3 = 0 \rightarrow c_3 = -c_1$

$2c_2 - c_4 = 0$

$c_4 = 2c_2$

$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$

$y(t) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t}$

g.c.

KOLAYLIK: Bir sistemde bilinmeyenlerden herhangi birinin veya her ikisinin önünde D operatörü yoksa o sistemin çözümünde bir kolaylık vardır. Kolaylık olma durumlarında önce önünde operatör olan bilinmeyeni bulmada büyük kolaylık vardır.

$$\left.\begin{array}{l} Dx - y = 0 \\ -2x + (D-1)y = 0 \end{array}\right\} \quad \boxed{x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}} \text{ idi}$$

$Dx - y = 0$ 'dan

$$y = Dx(t) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t}$$

ÖR

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x + \dfrac{dy}{dt} - y = e^t \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + x + \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} + y = t^2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} (D+1)x + (D-1)y = e^t \\ (D^2+D+1) + (D^2-D+1)y = t^2 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} D+1 & D-1 \\ D^2+D+1 & D^2-D+1 \end{vmatrix} = D^3 - D^2 + D + D^2 - D + 1 - D^3 - D^2 - D + D^2 + D + 1$$
$$= 2$$

Denklemin sistemi 0. mertebedendir. Çözümde hiç sabit bulunmamaktadır.

$$\Delta x(t) = 2x(t) = \begin{vmatrix} e^t & D-1 \\ t^2 & D^2-D+1 \end{vmatrix} = D^2(e^t) - D(e^t) + 1e^t - D(t^2) + 1 \cdot t^2$$
$$= e^t - e^t + e^t - 2t + t^2$$

$$2x(t) = e^t + t^2 - 2t \rightarrow x(t) = \frac{1}{2}\left(e^t + t^2 - 2t\right)$$

sistema g.a.

$$\Delta y(t) = 2y(t) = \begin{vmatrix} D+1 & e^t \\ D^2+D+1 & t^2 \end{vmatrix} = D(t^2) + 1 \cdot t^2 - D^2(e^t) - D(e^t) - 1 \cdot e^t$$
$$= 2t + t^2 - e^t - e^t - e^t$$

$$2y(t) = -3e^t + t^2 + 2t$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(-3e^t + t^2 + 2t\right)$$

$$\left.\begin{aligned} (D^2+D+1)x + (D^2+1)y &= e^t \\ (D^2+D)x + D^2 y &= e^{-t} \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} D^2+D+1 & D^2+1 \\ D^2+D & D^2 \end{vmatrix} = D^4 + D^3 + D^2 - D^4 - D^3 - D$$
$$= -D$$

$$\Delta x(t) = -D x(t) = -\frac{dx(t)}{dt} = \begin{vmatrix} e^t & D^2+1 \\ e^{-t} & D^2 \end{vmatrix} = e^t - e^{-t} - e^{-t}$$
$$= e^t - 2e^{-t}$$

$$-\frac{dx(t)}{dt} = e^{t} - 2e^{-t} \rightarrow dx(t) = (2e^{-t} - e^{t})\,dt$$

$$\boxed{x(t) = -2e^{-t} - e^{t} + c_1}$$

$$\Delta y(t) = -Dy(t) = -\frac{dy(t)}{dt} = \begin{vmatrix} D^2+D+1 & e^{t} \\ D^2+D & e^{-t} \end{vmatrix} = e^{-t} - e^{t} + e^{-t} - e^{t} - e^{t} = e^{-t} - 2e^{t}$$

$$\rightarrow dy(t) = (2e^{t} - e^{-t})\,dt$$

$$\boxed{y(t) = 2e^{t} + e^{-t} + c_2}$$

!!! $$(D^2+D+1)(-2e^{-t} - e^{t} + c_1) + (D^2+1)(2e^{t} + e^{-t} + c_2) \equiv e^{t}$$

$$-2e^{-t} - e^{t} + 2e^{-t} - e^{t} - 2e^{-t} - e^{t} + c_1 + 2e^{t} + e^{-t} + 2e^{t} + e^{-t} + c_2 \equiv e^{t}$$

$$e^{t} + c_1 + c_2 \equiv e^{t} \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow \boxed{c_2 = -c_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x(t) &= -2e^{-t} - e^{t} + c_1 \\ y(t) &= 2e^{t} + e^{-t} - c_1 \end{aligned}}$$

g. c.

136

ÖR

$$\left.\begin{aligned}(D+2)x+(D+1)y&=t\\ 5x+(D+3)y&=t^2\end{aligned}\right\}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}D+2 & D+1\\ 5 & D+3\end{vmatrix}=D^2+5D+6-5D-8$$

$$=D^2+1$$

Kolaylık var

$$\Delta y(t)=(D^2+1)y(t)=\begin{vmatrix}D+2 & t\\ 5 & t^2\end{vmatrix}=2t+2t^2-5t$$
$$=2t^2-3t$$

$$(D^2+1)\,y(t)=2t^2-3t$$

$$\hookrightarrow k^2+1=0 \rightarrow k_1=-i$$
$$\rightarrow k_2=i$$

$$y_{ö.ç.}=y(t)=at^2+bt+c$$
$$y'=2at+b$$
$$y''=2a$$

$$\Rightarrow 2a+at^2+bt+c=2t^2-3t$$

$a=2$ $\quad$ $b=-3$ $\quad$ $2a+c=0$

$c=-4$

$$y(t)=c_1\cos t+c_2\sin t+2t^2+3t-4$$

GIPTA

$5x + (D+3)y = t^2$ den

$$x(t) = \frac{1}{5}\left[t^2 - (D+3)(c_1\cos t + c_2\sin t + 7t^2 - 3t - 4)\right]$$

$$x(t) = \frac{1}{5}\left[t^2 + c_1\sin t - c_2\cos t - 4t + 3 - 3c_1\cos t - 3c_2\sin t - 6t^2 + 9t + 12\right]$$

$$x(t) = \frac{1}{5} \sim\sim\sim$$

---

* ÖR

$$\frac{dx}{dt} = 4x + y + e^t \qquad x(0) = 0$$
$$\frac{dy}{dt} = 6x - y - e^t \qquad y(0) = 0$$

$$(D-4)x - y = e^t$$
$$-6x + (D+1)y = -e^t$$ →

$$\rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} D-4 & -1 \\ -6 & D+1 \end{vmatrix} = D^2 - 3D - 4 - 6 = D^2 - 3D - 10$$

$$\Delta x(t) = (D^2 - 3D - 10)\, x(t) = \begin{vmatrix} e^t & -1 \\ -e^t & D+1 \end{vmatrix} = e^t + e^t - e^t = e^t$$

$(D^2-3D-10)x(t)=e^t$

$k^2-3k-10=0 \rightarrow k_1=-2$, $k_2=5 \Rightarrow$

$-2 \quad 5$

$x_{öa}=x(t)=a e^t$

$x'=a e^t \Rightarrow$

$x''=a e^t$

$\Rightarrow (a-3a-10a)e^t=e^t$

$-12a=1 \rightarrow a=-\frac{1}{12}$

$x(t)=c_1 e^{-2t}+c_2 e^{5t}-\frac{1}{12}e^t$

$(D-4)x-y=e^t$ den

$\rightarrow y(t)=(D-4)(c_1 e^{-2t}+c_2 e^{5t}-\frac{1}{12}e^t)-e^t$

$y(t)=-2c_1 e^{-2t}+5c_2 e^{5t}-\frac{e^t}{12}-4c_1 e^{-2t}-4c_2 e^{5t}+\frac{1}{3}e^t-e^t$

$y(t)=-6c_1 e^{-2t}+c_2 e^{5t}-\frac{3}{4}e^t$

$x(t)=c_1 e^{-2t}+c_2 e^{5t}-\frac{e^t}{12}$

$y(t)=-6c_1 e^{-2t}+c_2 e^{5t}-\frac{3}{4}e^t$

$\left.\begin{matrix} x(0)=0 \\ y(0)=0 \end{matrix}\right\}$ için $\rightarrow$

$$\Rightarrow c_1 + c_2 - \frac{1}{12} = 0$$

$$-6c_1 + c_2 - \frac{3}{4} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 = \frac{1}{12} \\ -6c_1 + c_2 = \frac{3}{4} \end{array}\right\} = 7c_1 = -\frac{2}{3}$$

$$c_1 = -\frac{2}{21}$$

$$c_2 = \frac{1}{12} + \frac{2}{21}$$

$$x(t) = -\frac{2}{21}e^{-2t} + \left(\frac{1}{12} + \frac{2}{21}\right)e^{5t} - \frac{e^t}{12}$$

$$y(t) = \frac{12}{21}e^{-2t} + \left(\frac{1}{12} + \frac{2}{21}\right)e^{5t} - \frac{3}{4}e^t$$

09/12/2010

ÖDEV

1) $(D-1)x+(D+3)y=e^{-t}-1$
$(D+2)x+(D+1)y=e^{2t}+t$

2) $(D+1)x+(2D+7)y=e^{t}+2$
$-2x+(D+3)y=e^{t}-1$

3) $(D+1)^2x+2Dy+3Dz=1$
$Dx+z=0$
$x-Dy-Dz=0$

4) $(D-1)x+(D+2)y=1+e^{t}$
$(D+2)y+(D+1)z=2+e^{t}$
$(D-1)x+(D+1)z=3+e^{t}$

5) $Dx-(D+1)y=e^{t}$
$x+(D-1)y=e^{2t}$

6) $(D+1)x+y=e^{t}$
$(D+1)y-x=e^{t}$

7) $(D-1)x+Dy=2t+1$
$(2D+1)x+2Dy=t$

8) $2\frac{dt}{dx}+\frac{dy}{dt}-4x-y=e^{t}$
$\frac{dx}{dt}+3x+y=0$

GIPTA

9) $Dx + (D+1)y = 1$
$(D+2)x + (-D+1)z = 1$
$(D+1)y + (D+2)z = 0$

10) $(D+2)x + 3y = 0$
$3x + (D+2)y = 2e^{2t}$

11) $x' = 3x + 2y$
$y' = -5x + y$
$x(0) = 0$
$y(0) = 1$

12) $4x' + 4x + y' = 1$
$3x' + y + y' = t$
$x(0) = 1$
$y(0) = 0$

13) $x' = 2x + y + t$
$y' = x + 2y + t^2$
$x(0) = y(0) = 0$

14) $x'' - 2y' + 3x = 0$
$y'' + 2x' + 3y = 0$
$x(0) = 4$, $y(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y'(0) = 0$

15) $x' = 3x + 4y$
$y' = 3x + 2y + t^2$
$x(0) = 0, y(0) = 0$

16) $x' = 6x - 7y + 10$
$y' = x - 2y - 2e^{-t}$
$x(0) = y'(0) = 1$

142

ÖR

$$\left.\begin{aligned} (D+1)^2 x + 2Dy + 3Dz &= 1 \\ Dx + z &= 0 \\ x - Dy - Dz &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} D^2+2D+1 & 2D & 3D \\ D & 0 & 1 \\ 1 & -D & -D \end{vmatrix} =$$

$= (D^2+2D+1)\,D - 2D(-D^2-1) + 3D(-D^2)$

$= \cancel{D^3} + \cancel{2D^2} + D + \cancel{2D^3} + \cancel{2D} - \cancel{3D^3}$

$= 2D^2 + 3D$

$$\Delta x(t) = (2D^2+3D)\,x(t) = \begin{vmatrix} 1 & 2D & 3D \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -D & -D \end{vmatrix} = ___$$

$(2D^2+3D)\,x(t) = ___$ çözülür. (c_1, c_2 devrede olsun)

$$\Delta y(t) = (2D^2+3D)\,y(t) = \begin{vmatrix} D^2+2D+1 & 1 & 3D \\ D & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -D \end{vmatrix} = ___$$

$(2D^2+3D)\,y(t) = ___$ çözülür. (c_3, c_4 devrede)

GIPTA

Çözümü sürdür

Laplace Dönüşümleri

$$y'' - 3y' + y = \begin{cases} \cos t, & t < a \\ t+1, & t \geq a \end{cases}$$

Tanım: $F(t)$, $F(x)$ —— $0 < t < \infty$ parça parça tanımlı ve sürekli bir fonksiyon ve s de $0 < s < b$ açık aralığında bir parametre olmak üzere eğer $\int_0^\infty e^{-st} \cdot F(x)\, dt$

integrali mevcut ise bu integral s'nin bir fonksiyonudur. İşte bu fonksiyona $F(t)$ Laplace dönüşümü denir. ve $\mathcal{L}[F(t)] = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot F(t)\, dt$ ile gösterilir.

Burada "$\mathcal{L}$" → Laplace operatörü.

$\mathcal{L}$ operatörünün özelliği ve bazı basit fonksiyonların Laplace dönüşümleri

1) $\mathcal{L}$, lineerdir. $\mathcal{L}[F_1(t) \pm F_2(t) \pm \ldots] = \int_0^\infty e^{-st}(F_1(t) \pm F_2(t) \pm \ldots)\,dt$

$= \mathcal{L}[F_1(t)] \pm \mathcal{L}[F_2(t)] \pm \ldots$

$= f_1(s) \pm f_2(s) \pm \ldots$

2) $k \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{L}[k] = \int_0^\infty e^{-st} . k\,dt = k \int_0^\infty e^{-st}\,dt$

$= -\frac{k}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty = -\frac{k}{s}\left(e^{-s\infty} - e^{-s.0}\right) = \frac{k}{s}$

$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$

$\mathcal{L}[-3] = \frac{-3}{s}$

$\mathcal{L}[\frac{1}{4}] = \frac{1/4}{s}$

3) $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} = \int_0^\infty e^{-st} . e^{at}\,dt$

$\mathcal{L}[e^{2t}] = \frac{1}{s-2}$

$\mathcal{L}[e^{-3x}] = \frac{1}{s+3}$

4) $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2}$

$\mathcal{L}[\sin \frac{1}{2} t] = \frac{1/2}{s^2 + \frac{1}{4}}$

GIPTA

5) $\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}$ $\mathcal{L}[\cos 3x] = \frac{s}{s^2+9}$

6) $n \in Z^+ = \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$

$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2!}{s^3}$, $\mathcal{L}[x] = \frac{1!}{s^2}$, —

7) $F(t)$ n. mertebeden türevi olan bir fonksiyon ve

$\mathcal{L}[F(t)] = f(s)$ ise

$\mathcal{L}[F^{(n)}(t)] = s^n y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - s^{n-3} y''(0) - \cdots$

$\cdots - s\, y^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$

$\mathcal{L}[y'] = sy(s) - y(0)$, $\mathcal{L}[y] = y(s)$

$\mathcal{L}[y''] = s^2 y(s) - sy(0) - y'(0)$,

$\mathcal{L}[y'''] = s^3 y(s) - s^2 y(0) - sy'(0) - y''(0)$

$\mathcal{L}[y^{iv}] = s^4 y(s) - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - sy''(0) - y'''(0)$

8) $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}[F(t)] = f(s) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{L}[e^{at} \cdot F(t)] = f(s-a)$

$$\mathcal{L}[e^{t} \cdot \sin t] = \frac{1}{(s-1)^2+1}$$

$F(t) \to \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2+1} = f(s)$

$$\mathcal{L}[e^{2x} \cdot \cos 3x] = f(s-2) = \frac{s-2}{(s-2)^2+9}$$

$F(x) \to \mathcal{L}[\cos 3x] = \frac{s}{s^2+9} = f(s)$

9) $\mathcal{L}[F(t)] = f(s) \Rightarrow \mathcal{L}[t^n \cdot F(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(f(s))$, $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\mathcal{L}[t\, e^{t}] = (-1)^1 \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-1}\right) = -\left(\frac{-1}{(s-1)^2}\right) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$F(t) \to \mathcal{L}[e^{t}] = \frac{1}{s-1}$

Gamma Fonksiyonu

Tanım: $x > 0$, olmak üzere $\int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1} \cdot dt$ integrali yakınsaktır ve bu integral x'in bir fonksiyonudur. İşte bu fonksiyona gamma fonksiyonu denir.

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1}\, dt$$

GIPTA

$\Gamma(x)$ için

a) $\Gamma(1)=1$

b) $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

c) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, $x\in\mathbb{R}$

d) $\Gamma(n+1)=n!$, $n\in\mathbb{Z}^+$

10) $x\in\mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{L}[t^x]=\dfrac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$

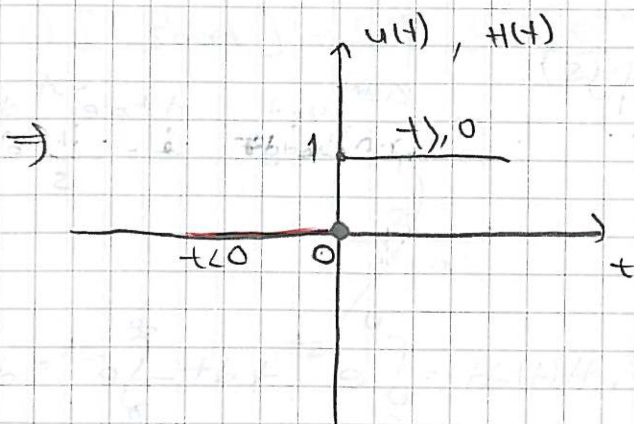
$n\in\mathbb{Z}^+ \Rightarrow \mathcal{L}[t^n]=\dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$

$=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$

Birim basamaklı Fonksiyon veya Heaviside Fonksiyon

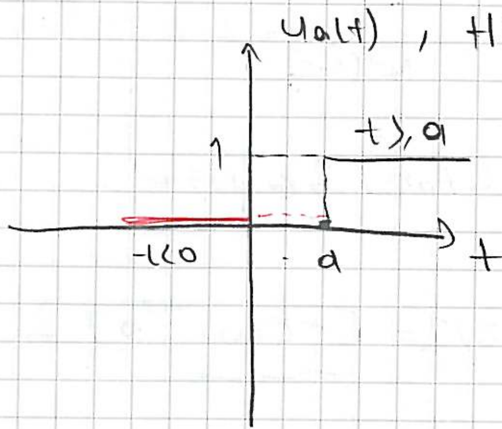
$$u(t)=H(t)=\begin{cases}0 , & t<0\\ 1 , & t\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Rightarrow$



Ötelenmişi

$$u_a(t) = u(t-a) = H(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$$



11) $\mathcal{L}[u(t)] = \dfrac{1}{s}$

12) $\mathcal{L}[u_a(t)] = \mathcal{L}[H(t-a)] = \dfrac{e^{-as}}{s}$

Ör)

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{6}(t-5)^3 \, e^{2(t-5)}, & t > 5 \\ 0, & t < 5 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{6}(t-5)^3 e^{2(t-5)} \cdot u(t-5)$$

$\downarrow$ $H(t-5)$

13) $\mathcal{L}[F(t)] = f(s)$, $a > 0$

$$\mathcal{L}[u_a(t) \cdot F(t-a)] = e^{-as} f(s)$$

Ör

$$H(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 4 \\ 5, & t \geq 4 \end{cases}$$

Kısmi: $u = t$, $dv = e^{-st}\,dt$; $du = dt$, $v = -\dfrac{1}{s} e^{-st}$

$\mathcal{L}[H(t)] = ?$ $\mathcal{L}[H(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot H(t)\,dt = \int_0^4 e^{-st} \cdot t\,dt - \int_4^\infty e^{-st} \cdot 5\,dt$

GIPTA

$$\mathcal{L}[H(t)] = -\frac{1}{5}e^{-st}\Big|_0^4 + \frac{1}{5}\int_0^4 e^{-st}dt - \frac{5}{3}e^{-st}\Big|_4^\infty$$

$$= -\frac{4}{5}e^{-4s} + 0.\frac{1}{5}e^{-s.0} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^4 - \frac{5}{3}\left(e^{-s.\infty} - e^{-4s}\right)$$

$$= -\frac{4}{5}e^{-4s} - \frac{1}{s^2}e^{-4s} + \frac{1}{s^2}e^{-0.s} + \frac{5}{s}e^{-4s}$$

$$= e^{-4s}\left(-\frac{4}{5} - \frac{1}{s^2} + \frac{5}{s}\right) + \frac{1}{s^2} = h(s)$$

14) $\mathcal{L}[\sin^2 at] = \mathcal{L}\left[\frac{1-\cos 2at}{2}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[1] - \frac{1}{2}\mathcal{L}[\cos 2at]$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+(2a)^2}$$

15) $\mathcal{L}[\cos^2 at] = \mathcal{L}\left[\frac{1+\cos 2at}{2}\right] = ____$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+(2a)^2}$$

16) $\mathcal{L}[\operatorname{sh} at] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right]$

$$= \frac{a}{s^2-a^2}$$

17) $\mathcal{L}[\text{ch}at] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right]$

$= \overline{\quad}$

$= \frac{s}{s^2-a^2}$

18) $\mathcal{L}[F(t)] = f(s) \Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{F(t)}{t}\right] = \int_s^\infty f(\tau)\,d\tau,$

$f(s)$ 'de $s \to \tau$ için $f(\tau)$

ör $\mathcal{L}\left[\frac{1-\cos t}{t}\right] = ?$, $F(t) = 1-\cos t$

, $\mathcal{L}[1-\cos t] = \mathcal{L}[1] - \mathcal{L}[\cos t]$

$= \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2-1} = f(s) \to f(\tau) = \frac{1}{\tau} - \frac{\tau}{\tau^2+1}$

$\Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{1-\cos t}{t}\right] = \int_s^\infty \left(\frac{1}{\tau} - \frac{\tau}{\tau^2+1}\right) d\tau$

$= \ln\tau - \frac{1}{2}\ln(\tau^2+1)\Big|_s^\infty$

$= \lim_{m\to\infty}\left(\ln\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\right) - \ln\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}$

$= \ln\left(\lim_{m\to\infty}\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}\right) = \ln\left(\lim_{m\to\infty}\frac{m}{m\cdot\sqrt{1-\frac{1}{m^2}}}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}\right)$

$= \ln\Bigg(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\underbrace{1+\frac{1}{\infty^2}}_{1}}}}_{0}\Bigg) + \ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}$

$= \mathcal{L}\left[\frac{1-\cos t}{t}\right] = \ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}$

19) $\mathcal{L}[t^{-1/2}] = \left(\frac{\pi}{s}\right)^{1/2}$

20) $\mathcal{L}[F(t)] = f(s)$

$\Rightarrow \mathcal{L}\left[\int_0^t F(t)\,dt\right] = \frac{f(s)}{s}$

15/12/2010

Ters Laplace Dönüşümleri

$F(t)$, $\mathcal{L}[F(t)] = f(s)$

$F(s)$, $F(t)$'yi hesaplayalım. $F(t)$'yi bulma işlemine ters laplace dönüşümü denir.

$\mathcal{L}^{-1}[f(s)] = F(t) \Leftrightarrow \mathcal{L}[F(t)] = f(s)$ şeklinde ifade edilir.

"$\mathcal{L}^{-1}$" → ters laplace operatörü

1) $\mathcal{L}^{-1}$ lineer

$\mathcal{L}^{-1}[f_1(s) \mp f_2(s) \mp \ldots] = \mathcal{L}^{-1}[f_1(s)] \mp \mathcal{L}^{-1}[f_2(s)] \mp \ldots$

$= F_1(t) \mp F_2(t) \ldots$

2) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{s}\right] = k$, $\mathcal{L}[k] = \frac{k}{s}$ idi

3) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$, $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$ idi

4) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos at$, $\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}$ idi

?) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{n+1}}\right]=\frac{t^n}{n!}$, $\mathcal{L}[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}$ idi

?) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2-a^2}\right]=\sinh at$, $\mathcal{L}[\sinh at]=\frac{a}{s^2-a^2}$ idi

Ters Laplace hesabı için başka durumlar

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s-4}{s^2+9}\right]=3\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right]}_{\cos t}-\frac{4}{3}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+9}\right]}_{\sin 3t}$$

$$=3\cos 3t-\frac{4}{3}\sin 3t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+1}{4s^2+1}\right]=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right]+\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}t$$

ÖR

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(\sqrt{s}-2)^3}{s^4}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^{3/2}-6s+12s^{1/2}-8}{s^4}\right]$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{5/2}}\right]-6\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right]$$

$$+12\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{7/2}}\right]-8\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right]$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{3/2+1}}\right]-6\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{2+1}}\right]+12\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{5/2+1}}\right]-8\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{3+1}}\right]$$

$$=\frac{t^{3/2}}{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}-6\frac{t^2}{2!}+12\frac{t^{5/2}}{\Gamma(5/2+1)}-8\frac{t^3}{3!}$$

GIPTA

$$\left(\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad , \quad \mathcal{L}[t^x] = \frac{\Gamma(x+1)}{s^{n+1}} \quad \text{idi} \right)$$

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma\left(\tfrac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\Gamma(3/2)$$

$$= \frac{3}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+1\right)$$

$$= \frac{3}{2}\frac{1}{2}\underbrace{\Gamma(1/2)}_{\sqrt{\pi}} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \quad , \quad \Gamma(5/2+1) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\underbrace{\Gamma(1/2)}_{\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{4 \cdot t^{3/2}}{3\sqrt{3}} - 3t^2 + \frac{12 \cdot 8}{15\sqrt{\pi}} t^{5/2} - \frac{4}{3}t^3$$

Başka Hesaplama Şekli

Ör

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{s^2+s-2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{(s-1)(s+2)}\right] \quad , \quad \frac{s+3}{(s-1)(s+2)} = \frac{a}{\underset{(s+2)}{s-1}} + \frac{b}{\underset{(s-1)}{s+2}}$$

$$s+3 \equiv (a+b)s + 2a - b$$

$$a+b=1 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

$$2a-b = \quad b = -\frac{1}{3}$$

$$= \frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

$$= \frac{4}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t}$$

GIPTA

154

$$\sin at = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}$$

$$\cos at = \frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}$$

$z = a + ib$ $\quad i \cdot i = i^2 = -1$

$\bar{z} = a - ib$ $\quad \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{\underbrace{(1-i)(1+i)}_{2}} = \frac{(1+i)^2}{2}$

ÖR

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right] = ?$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-i)(s+i)}\right] \quad , \quad \frac{1}{(s-i)(s+i)} \equiv \frac{a}{\underset{(s+i)}{s-i}} + \frac{b}{\underset{(s-i)}{s+i}}$$

$$0 \cdot s + (1 + 0 \cdot i) = 1 + 0 \cdot i = 1 \equiv (a+b)s + i(a-b)$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ i(a-b)=1 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ a-b=-i \end{array}\right) \Rightarrow a = -\frac{i}{2}$$

$$b = \frac{i}{2}$$

$$= \frac{-i}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-i}\right] + \frac{i}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+i}\right]$$

$$= -\frac{i}{2}e^{it} + \frac{i}{2}e^{-it}$$

$$= -i\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2}\right) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sin t$$

GIPTA

Bir Başka Hesaplama Şekli

$$f(s) = \frac{g(s)}{(s-a_1)^n \cdot (s+a_2)^m \underbrace{(s-ia_{3_1})^p (s+ia_{3_2})^p}_{(s^2+a_3^2)^p} \cdots}$$

, $n, m, p \in Z^+$

$\mathcal{L}^{-1}[f(s)] = ?$

$$a_{-1} = \lim_{s\to a_1} \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left[(s-a_1)^n \; e^{st} f(s) \right]$$

$$a_{-2} = \lim_{s\to -a_2} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[(s+a_2)^m \cdot e^{st} f(s) \right]$$

$$a_{-3_1} = \lim_{s\to ia_{3_1}} \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{ds^{p-1}} \left[(s-a_{3_1})^p \cdot e^{st} f(s) \right]$$

$$a_{-3_2} = \lim_{s\to -ia_{3_2}} \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{ds^{p-1}} \left[(s+a_{3_2})^p \cdot e^{st} f(s) \right]$$

Sonuç olarak

$$\mathcal{L}^{-1}[f(s)] = a_{-1} + a_{-2} + a_{-3_1} + a_{-3_2} + \cdots$$

ÖR

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-i)(s+i)}\right]$$

$$= \lim_{s\to i} \left((s-i)\, e^{st} \frac{1}{(s-i)(s+i)} \right)$$

$$+ \lim_{s\to -i} \left((s+i)\, e^{st} \frac{1}{(s-i)(s+i)} \right)$$

$$= \frac{e^{it}}{2i} - \frac{e^{it}}{2i} = \underline{\sin t} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

Ör

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^{20}}\right] = \lim_{s\to 1} \frac{1}{(20+1)!} \frac{d^{19}}{ds^{19}}\left[(s-1)^{20} \cdot e^{st} \frac{1}{(s-1)^{20}}\right]$$

$$= \lim_{s\to 1} \frac{t^{19}}{19!} e^{st}$$

$$= \frac{1}{19!} t^{19} e^{t}$$

Laplace Dönüşümü Yardımı ile Dif. Denklem Çözümleri

Sabit Katsayılı Denklemlerin Çözümü

$$\mathcal{L}[F(t)] = f(s)$$

$$\mathcal{L}[F^{(n)}(t)] = s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-3} f(0)'' - \dots - s F^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{n+1}}\right] = \frac{t^n}{n!} \quad , \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{x+1}}\right] = \frac{t^x}{\Gamma(x+1)}$$

Ör

$y' = y'(x)$, $y = y(t)$ $x = x(t)$, $w = w(x)$, $w = (t)$

olmak üzere

$y' - 2y = e^{st}$, $y(0) = 3$ şart altında çözelim.

Önce verilen denklemin 2 yanının Laplace'ı alınır. verilmiş ise ilk şartlar kullanılır. Düzenlenerek $g(s) = \text{———}$ çözülür. Sonra da ters Laplace ile $\mathcal{L}^{-1}[y(s)] = y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\text{———}] = \text{———}$

çözüm bu olur. Buna göre

$$\mathcal{L}[Y' - 2Y] = \mathcal{L}[e^{5t}]$$

$$\mathcal{L}[Y'] - 2\mathcal{L}[Y] = \frac{1}{s-5} \quad , \quad \mathcal{L}[Y(t)] = y(s)$$

$$s y(s) - \overset{\to 3}{Y(0)} - 2y(s) = \frac{1}{s+5} \Rightarrow (s-2)\,y(s) = 3 + \frac{1}{s-5}$$

$$y(s) = \frac{3}{s-2} + \frac{1}{(s-2)(s-5)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s-2} + \frac{1}{(s-2)(s-5)}\right]$$

$$Y(t) = 3e^{2t} + \lim_{s\to 2}\left(\frac{e^{st}}{s-5}\right) + \lim_{s\to 5}\left(\frac{e^{st}}{s-2}\right)$$

$$Y(t) = 3e^{2t} - \frac{e^{2t}}{3} + \frac{e^{5t}}{3}$$

$$\boxed{Y(t) = \frac{8}{3}e^{2t} + \frac{e^{5t}}{3}}$$

ÖR

$$x'' + 2x' + x = 3te^{-t} \quad , \quad x = x(t)$$

$$x(0) = 4 \ , \ x'(0) = 2$$

$$s^2 x(s) - s\overset{\to 4}{X(0)} - \overset{\to 2}{X'(0)} + 2(s x(s) - \underset{4}{X(0)}) + X(s) = 3(-1)^1 \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

$$= \frac{3}{(s+1)^2}$$

$$\left(\mathcal{L}[t^n \cdot F(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s), \quad \mathcal{L}[F(t)] = f(s)\right)$$

$$(s^2+2s+1)X(s) = \frac{3}{(s+1)^2} + 4s+10 \Rightarrow$$

$(s^2+2s+1) \rightarrow (s+1)^2$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{3}{(s+1)^4} + \frac{4s+10}{(s+1)^2}$$

$$\Rightarrow x(t) = 3 \lim_{s\to -1} \frac{1}{3!}\frac{d^3}{ds^3}\left(e^{st}\right) + \lim_{s\to -1}\frac{d}{ds}\left(e^{st}(4s+10)\right)$$

$$x(t) = 3\lim_{s\to -1}\frac{1}{3!}t^3 e^{st} + \lim_{s\to -1}\left(te^{st}(4s+10) + 4e^{st}\right)$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{t^3}{2}e^{-t} + 6te^{-t} + 4e^{-t} = \boxed{x(t) = \left(\frac{t^3}{2} + 6t + 4\right)e^{-t}}$$

16/12/2010

Ör

$w'' + 2w' + w = x, \quad x(0) = -3, \quad w(1) = -1$

$w = w(x)$

$$s^2 W(s) - sW(0) - W'(0) + 2\left(sW(s) - W(0)\right) + W(s) = \frac{1}{s^2}$$

($W(0) = -3$, $W'(0) = c$)

$$(s^2+2s+1)W(s) = \frac{1}{s^2} - 3s + c - 6$$

$(s^2+2s+1) \rightarrow (s+1)^2$

$$\Rightarrow \boxed{W(s) = \frac{1}{s^2(s+1)^2} + \frac{c-3s-6}{(s+1)^2}}$$

$\mathcal{L}^{-1}$ ile

$$W(x) = \lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{st}}{(s+1)^2}\right) + \lim_{s\to -1}\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{sx}}{s^2}\right) + \lim_{s\to -1}\left(e^{sx}(c-3s-6)\right)$$

$$W(x) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{xe^{sx}(s+1)^2 - 2(s+1)e^{sx}}{(s+1)^4}\right) + \lim_{s\to -1}\left(\frac{xe^{sx} - 2se^{sx}}{s^4}\right) + \lim_{s\to -1}\left(xe^{sx}(c-3s-6) - 3e^{sx}\right)$$

GIPTA

$W(x) = x-2 + xe^{-x} + 2e^{-x} + xe^{-x}(c-3) - 3e^{-x}$

$W(x) = x-2+[x+2+x(c-3)-3]e^{-x}$

$\Rightarrow \boxed{W(x) = x-2+[x-1+x(c-3)]e^{-x}}$

$W(1) = -1$ için

$\Rightarrow W(1) = -x = -x + (c-3)e^{-1}$

$(c-3)e^{-1} = 0 \Rightarrow \boxed{c=3}$ dir.

$\Rightarrow \boxed{W(x) = x-2+(x-1)e^{-x}}$

ÖR

$y'' - y' - 2y = 1 \quad , \quad y = y(t)$

$s^2 y(s) - s y(0) - y'(0) - (s y(s) - y(0)) + 2y(s) = \frac{1}{s}$

$y(0) \to c_1$, $y'(0) \to c_2$, $y(0) \to c_3$

$\underbrace{(s^2 - s - 2)}_{(s+1)(s-2)} y(s) = \frac{1}{s} + cs + c_2 - c_1$

$$\boxed{y(s) = \frac{1}{s(s+1)(s-2)} + \frac{c_1 s + c_2 - c_1}{(s+1)(s-2)}}$$

$\mathcal{L}^{-1}$ ile

$$y(t) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)}\right) + \lim_{s\to -1}\left(\frac{e^{st}}{s(s-2)}\right) + \lim_{s\to 2}\left(\frac{e^{st}}{s(s+1)}\right) + \lim_{s\to -1}\left(\frac{e^{st}(c_1 s + c_2 - c_1)}{s-2}\right)$$

$$+ \lim_{s\to 2}\left(\frac{e^{st}(c_1 s + c_2 - c_1)}{(s+1)}\right)$$

$$Y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t}(c_2 - 2c_1) + \frac{1}{3}e^{2t}(c_1 + c_2)$$

$$Y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(1 - (c_2 - 2c_1)\right)e^{-t} + \frac{1}{6}\left(1 + c_1 + c_2\right)e^{2t}$$

$$\boxed{Y(t) = \frac{1}{3}\left(1 + 2c_1 - c_2\right)e^{-t} + \frac{1}{3}\left(1 + c_1 + c_2\right)e^{2t} - \frac{1}{2}}$$

g.c

c_1, c_2

$$Y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - \frac{1}{2}$$

$$k^2 - k - 2 = 0 \rightarrow k_1 = 1, \quad k_2 = 2$$

$Y_{öa} = Y = a$

$Y' = 0$

$Y'' = 0$

$$Y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - \frac{1}{2}$$

$-2a = 1$

$$\boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - \frac{1}{2}$$

2. Arasınav Cevapları (18.12.2010)

1) $y' - \frac{y}{x} = 2e^{\frac{y}{x}}$, $\frac{y}{x} = u$

$y' = u'x + u$

$u'x + u - u = 2e^u$

$e^{-u} du = \frac{2dx}{x}$

$-e^{-u} = 2\ln|x| + c$

$$-e^{-\frac{y}{x}} = 2\ln|x| + c$$

2) $x^2 y dx + (x^3 - 1) dy = 0$

$P_y = \frac{x^2 - 2x^2}{-x^2 y} = \frac{2}{y} \rightarrow \lambda = y^2$

$x^2 y^3 dx + (x^3 y^2 - y^2) dy = 0$ (Tam)

$u = \int^x x^2 y^3 dx + h(y)$

$u = \frac{x^3 y^3}{3} + h(y)$

$u_y = x^3 y^2 + h'(y) = x^3 y^2 - y^2$

$h'(y) = -y^2$

$h(y) = -\frac{y^3}{3} \Rightarrow$ $$\frac{x^3 y^3}{3} - \frac{y^3}{3} = c$$

3) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$

$y_{h.g.c.} = y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$

$y' = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} - c_2 x e^{-x} + \underbrace{c_1' e^{-x} + c_2' x e^{-x}}_{0}$

$y'' = \text{------------} \underbrace{-c_1' e^{-x} + c_2' e^{-x} - c_2' x e^{-x}}_{e^{-x} \ln x}$

$c_1' + c_2' x = 0$
$-c_1' + c_2' - c_2' x = \ln x$ $\Big\}$ $c_2' = \ln x$

$\boxed{c_2 = x \ln x - x + \alpha_2}$

$c_1' = -x \ln x \rightarrow c_1 = \int x \ln x \, dx$

$c_1 = -\frac{x^2}{2} \ln x + \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} + \alpha_1$

$\boxed{c_1 = -\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + \alpha_1}$

$\left(\begin{array}{c} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \\ x\,dx = du \\ \frac{x^2}{2} = u \end{array} \right)$

$\boxed{y = e^{-x}\left(-\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + \alpha_1\right) + x e^{-x}\left(x \cdot \ln x - x + \alpha_2\right)}$

4) $y'' + ty' = 0$, $t = 0$ adi nok.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} + n a_n \right] t^n \equiv 0$$

$$a_n + 2 = \frac{-n a_n}{(n+1)(n+2)}$$ a_0, a_1 keyfi

Çiftler

$a_2 = \frac{-0 \cdot a_0}{} = 0$

$a_4 = 0$

$\vdots$

$a_{2n} = 0$

Tekler

$$a_3 = -\frac{1a_1}{2\cdot 3}$$

$$a_5 = -\frac{3a_3}{4\cdot 5}$$

$$a_7 = -\frac{5a_5}{6\cdot 7}$$

$$a_{2n+1} = \frac{-(2n-1)a_{2n-1}}{(2n)(2n+1)}$$

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n \cdot 1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)a_1}{(2n+1)!} \quad (n=1,2,\ldots)$$

$$y = a_0 + a_1\left(t - \frac{1t^3}{3!} + \frac{1\cdot 3 t^5}{5!} - \frac{1\cdot 3\cdot 5 t^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \ldots (2n-1)t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right.$$

5) $\left.\begin{aligned} -x + Dy &= 0 \\ Dx + Dy &= e^t \end{aligned}\right) \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} -1 & D \\ D & D \end{vmatrix} = -D^2 - D = -(D^2+D)$

Kolaylık var

$Dy = -(D^2+D)y(t) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ D & e^t \end{vmatrix} = -e^t$

$(D^2+D)y(t) = e^t$

$\rightarrow k_1 = 0$
$k_2 = -1$

$y''_{ö.ç.} = y = ae^t$

$y' = ae^t$

$y'' = ae^t$

$2a = 1 = a = \frac{1}{2}$

$y(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{1}{2} e^t$ → Sistemin çözümü

$-x + Dy = 0$ dan $x = -c_2 e^{-t} + \frac{1}{2} e^t$

6) $y'' - y = -t \quad , \quad y(0) = 0 \; , \; y'(0) = -1$

$$s^2 y(s) - s\,y(0) - y'(0) - y(s) = -\frac{1}{s^2}$$

$y(0) \to 0$, $y'(0) \to -1$

$$(s^2 - 1)\,y(s) = -\frac{1}{s^2} - 1$$

$$y(s) = -\frac{1}{s^2(s-1)(s+1)} - \frac{1}{s^2-1}$$

$$y(t) = -\lim_{s \to 0} \frac{d}{ds}\left(\frac{e^{st}}{s^2-1}\right) - \lim_{s \to 1} \frac{e^{st}}{s^2(s+1)} - \lim \frac{e^{st}}{s^2(s-1)} - \left(\frac{e^{t} - e^{-t}}{2}\right)$$

$\to \sinh t$

$$y(t) = -\lim_{s \to 0} \frac{t \cdot e^{st}(s^2-1) - 2s e^{st}}{(s^2-1)^2} - \frac{e^{t}}{2} + \frac{e^{t}}{2} - \frac{e^{t}}{2} + \frac{e^{-t}}{2}$$

$$\boxed{y(t) = t - e^{t} + e^{-t}}$$

GIPTA

Laplace Değişken Katsayılara Uygulanış

ÖR

$y'' + t y' - 2y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0$

$s^2 y(s) - s y(0) - y'(0) + (-1)^1 \frac{d}{ds}(s y(s) - y(0)) - 2 y(s) = \frac{1}{s}$,

$\left(\mathcal{L}[F(t)] = f(s) \Rightarrow \mathcal{L}[t^n F(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds}(f(s)) \right)$
kuralından

$s^2 y(s) - y(s) - s \frac{dy(s)}{ds} - 2 y(s) = \frac{1}{s}$

$-s \frac{dy(s)}{ds} + (s^2 - 3) y(s) = \frac{1}{s}$

$\frac{dy(s)}{ds} + \left(\frac{3}{s} - s\right) y(s) = -\frac{1}{s^2}$ (Lineer)

$\lambda = e^{\int (\frac{3}{s} - s) ds}$

$= e^{3\ln s - \frac{s^2}{s}}$

$= s^3 e^{-\frac{s^2}{2}}$

$s^3 e^{-\frac{s^2}{2}} y(s) = -\int \frac{1}{s^2} s^3 e^{-\frac{s^2}{2}} ds + c \rightarrow 0$ alınmalıydı

$= e^{-\frac{s^2}{2}} + c$

$\Rightarrow y(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{c}{s^3} e^{\frac{s^2}{2}}$

NOT: (Teorem: $\lim_{s \to \infty} y(s) = 0$ dır.)

Bulduğumuz sonucu teoreme göre yorumlayacağız

Teo. göre: $\lim_{s\to\infty} y(s) = \lim_{s\to\infty} \left(\frac{1}{s^3} + \frac{c}{s^3} e^{\frac{s^2}{2}}\right) = 0$ olmadır.

$\Rightarrow \frac{1}{\infty^3 \to \infty} + c \frac{e^{\frac{\infty^2}{2}} \to \infty}{\infty^3 \to \infty} = 0$ olmalır

0

$c\,\infty$

$\Rightarrow c = 0$ alınmalıydı

$\Rightarrow \boxed{y(s) = \frac{1}{s^3}}$ olur

$\mathcal{L}^{-1}$ ile $\boxed{Y(t)\ \frac{t^2}{2!}}$

Ör

$tY'' + Y = 0 \quad , \quad Y(0) = 0 \quad , \quad Y'(0) = 1$

$-\frac{d}{ds}\left(s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0)\right) + y(s) = 0$

($Y(0) \to 0$, $Y'(0) \to 1$)

$-2s\,y(s) - s^2 \frac{dy(s)}{ds} + y(s) = 0$

$-s^2 \frac{dy(s)}{ds} + (1-2s)\,y(s) = 0$

$\Rightarrow \frac{dy(s)}{ds} + \left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s^2}\right) y(s) = 0$

$\frac{dy(s)}{y(s)} = \left(\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s}\right) ds$

$$\ln y(s) = -\frac{1}{s} - 2\ln s + \ln c$$

$$\boxed{y(s) = \frac{c}{s^2} e^{-\frac{1}{s}}}$$

↳ Teo. göre

$$\lim_{s\to\infty} y(s) = c \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s^2 e^{\frac{1}{s}}} = 0 \quad \text{olmalı}$$

$$= c\,\frac{1}{\infty^2 \left(e^{\frac{1}{\infty}}\right)}$$

($\infty^2 \to \infty$, $e^{\frac{1}{\infty}} \to 1$)

$$= \frac{c}{\infty} = 0 \Rightarrow \text{Teo.} \checkmark \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R} \text{ için Teo. sağlanıyor.}$$

NOT!! : $\forall c \in \mathbb{R}$ için teoremin sağlanması durumunda c'nin çarpanında bulunan üstelli ifade $(e^{-\frac{1}{s}})$ Mclaren serisine açılır.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$x \to -\frac{1}{s}$ alarak

$$y(s) = \frac{c}{s^2}\left(1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{2!}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{s^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\frac{1}{s^n} + \cdots\right)$$

$$y(s)\, c.\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{2!}\frac{1}{s^4} - \frac{1}{3!}\frac{1}{s^5} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\frac{1}{s^{n+2}} + \cdots\right)$$

$\mathcal{L}^{-1}$ ile
$$\boxed{y(t) = c\left(t - \frac{t^2}{2!} + \frac{1}{2!}\frac{t^3}{3!} - \frac{1}{3!}\frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots\right)}$$

170

$y(0)=0$, $y'(0)=1$ için $\rightarrow$ $y(0)=c\cdot 0=0$ ✓

$y'(t)=c\left(1-(t\text{'li terimler})\right) \rightarrow y'(0)=c\cdot 1=1$ $\quad c=1$

$$y(t)=t-\frac{t^2}{2!}+\frac{1}{2!}\frac{t^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots$$

ÖR

$ty''+2y'+ty=0$, $y(0)=1$, $y(\pi)=0$

$\hookrightarrow -\frac{d}{ds}\left(s^2y(s)-sy(0)-y'(0)\right)+2\left(sy(s)-y(0)\right)-y(0)\Big)-\frac{d}{ds}y(s)=0$

($y(0) \rightarrow 1$, $y'(0) \rightarrow c$)

$$-2sy(s)-s^2\frac{dy(s)}{ds}+1+2sy(s)-2-\frac{dy(s)}{ds}=0$$

$$-(s^2+1)\frac{dy(s)}{ds}=1 \rightarrow dy(s)=\left(\frac{-1}{s^2+1}\right)ds$$

$$y(s)=-\arctan s+c$$

Teo. Göre

$\lim_{s\to\infty} y(s)=\lim_{s\to\infty}(-\arctan s+c)=0$ olmalı

$=\underbrace{-\arctan\infty}_{\frac{\pi}{2}}+c=0$

$=\underbrace{-\frac{\pi}{2}+c=0}$

$\hookrightarrow c=\frac{\pi}{2}$ dir $\quad \Rightarrow y(s)=\frac{\pi}{2}-\arctan s$

$\arctan\frac{1}{s}$

$$\Rightarrow y(s)=\arctan\frac{1}{s}$$

$$Y(t) = \frac{\sin t}{t}$$

$$\left(\mathcal{L}\left[\frac{F(t)}{t}\right] = \int_s^\infty f(\tau)\,d\tau, \quad \mathcal{L}[F(t)] = f(s) \right)$$

$$\left(\mathcal{L}\left[\frac{\sin at}{t}\right] = \arctan\frac{a}{s} \quad \text{idi} \right)$$

ÖP

$$Y'' - tY' + Y = 1, \quad Y(0) = 1, \quad Y'(0) = 2$$

$$s^2 y(s) - s\underset{\substack{\downarrow\\1}}{Y(0)} - \underset{\substack{\downarrow\\2}}{Y'(0)} + \frac{d}{ds}\left(s\,y(s) - \underset{\substack{\downarrow\\1}}{Y(0)}\right) + y(s) = \frac{1}{s}$$

$$s^2 y(s) - s - 2 + y(s) + s\frac{dy(s)}{ds} + y(s) = \frac{1}{s}$$

$$s\frac{dy(s)}{ds} + (s^2+2)y(s) = \frac{1}{s} + s + 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dy(s)}{ds} + \left(s + \frac{2}{s}\right)y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} + 1 \quad \text{(Lineer)}$$

$$\lambda = e^{\int (s + \frac{2}{s})ds} = e^{\frac{s^2}{2} + 2\ln s} = s^2 e^{\frac{s^2}{2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow s^2 e^{\frac{s^2}{2}} y(s) = \int s^2 e^{\frac{s^2}{2}} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} + 1\right) ds$$

$$\Rightarrow y(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{c}{s^2} e^{-\frac{s^2}{2}}$$

↘ Teo. Göre

$$\lim_{s \to \infty} y(s) = \frac{1}{\infty} + \frac{2}{\infty^2} + \frac{c}{\infty^2} \frac{1}{e^{\frac{\infty^2}{2}}} = 0$$ olmalı, $\forall c \in \mathbb{R}$ için Teo. ✓'dır.

(0, 0, 0)

$$\Rightarrow y(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{c}{s^2}\left(1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{8} - \text{---}\right)$$

$$y(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{c}{s^2} - c\left(\frac{1}{2} - \frac{s^2}{8} + \text{---}\right)$$

$\mathcal{L}^{-1}$ ile $\Rightarrow y(t) = 1 + (c+2)t - \mathcal{L}^{-1}\left\{c\left[\frac{1}{2} - \frac{s^2}{8} + \text{---}\right]\right\}$

↳ 0 olur.

Not! Bu durum için

$\mathcal{L}^{-1}[s^k] = 0$'dır $(k = 0, 1, 2 \ldots)$ $\Rightarrow$ Bu yüzden

$$y(t) = 1 + (c+2)t \quad \text{olur.}$$

$\left.\begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{array}\right)$ için $\Rightarrow$ $y(0) = 1 + 0 = 1$ ✓

$y'(t) = c + 2$

$y(0) = c + 2 = 2$

$c = 0$

$$\Rightarrow y(t) = 1 + 2t$$

ÖDEV:

1) $y'' + 3t\,y' - 6y = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$ $\left(y(t) = \frac{t^2}{2!} \right)$

2) $ty'' + (3-t)y' - 2y = t-1$, $y(0) = 0$ $y'(0) = -\frac{1}{3}$ $\left(y(t) = -\frac{t}{3} \right)$

3) $y'' + ty' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $(y(t) = t)$

4) $ty'' + (1-2t)y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $(y(t) = e^{2t})$

5) $ty'' + (t-1)y' - y = 0$, $y(0) = 5$, $y(\infty) = 0$, $(y = 5e^{-t})$

6) $ty'' - ty' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$

7) $y'' - 2y' - 8y = 0$, $y(0) = 3$; $y'(0) = 6$

8) $y'' + y = e^{-2t}\sin t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

9) $y'' + 2y = 3t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

10) $y'' + 2y' + 5y = e^{-t}\sin t$, $y(0) = -3$, $y'(0) = -2$

23/12/2010

İntegral Denklemlerine Uygulanış

ÖR

$$y' + 2y - 3\int_0^t y\,dt = 5t + 5, \quad y(0) = 2$$

$$\left(\mathcal{L}[F(t)] = f(s) \Rightarrow \mathcal{L}\left[\int_0^t F(t)\,dt\right] = \frac{f(s)}{s} \text{ idi} \right)$$

$$s y(s) - y(0) + 2y(s) - 3\frac{y(s)}{s} = \frac{5}{s^2} + \frac{5}{s}$$

$$\Rightarrow s^2 y(s) - 2s + 2s y(s) - 3y(s) = \frac{5}{s} + 5$$

$$\Rightarrow (s^2 + 2s - 3)\,y(s) = \frac{5}{s} + 2s + 5 \Rightarrow \frac{5}{s(s-1)(s+3)} + \frac{2s+5}{(s-1)(s+3)}$$

(kökler: 1, −3)

$$y(t) = \lim_{s\to 0} \frac{5e^{st}}{(s-1)(s+3)} + \lim_{s\to 1} \frac{5e^{st}}{s(s+3)} + \lim_{s\to -3} + \lim_{s\to 1} \frac{e^{st}(2s+5)}{s+3}$$

$$+ \lim_{s\to -3} \frac{e^{st}(2s+5)}{s-1}$$

$$y(t) = -\frac{5}{3} + \frac{5}{4}e^{t} + \frac{5}{12}e^{-3t} + \frac{7}{4}e^{t} + \frac{1}{4}e^{-3t}$$

$$y(t) = -\frac{5}{3} + 3e^{t} + \frac{2}{3}e^{-3t}$$

GIPTA

Sistemlere Uygulanış

Ör

$$\left.\begin{array}{l} x' - 2x + 3y = 0 \\ 2x + y' - y = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x(0) = 8 \\ y(0) = 3 \end{array}$$

Sistemin her bir denklemin 2 yanının Laplace'ı alınır. Verilmişse ilk şartlar kullanılır. Sonra sistem $x(s), y(s), z(s), ___$ vb bilinmeyenlerine göre yeniden sistem düzenlenir. Sonra sözkonusu bu sistemden $x(s), y(s), z(s)$ bulunur. Bunların ters Laplace'ı alınarak çözüme ulaşılır.

$$\left.\begin{array}{l} sx(s) - \underset{8}{x(0)} - 2x(s) + 3y(s) = 0 \\ 2x(s) + sy(s) - \underset{3}{y(0)} - y(s) = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (s-2)x(s) + 3y(s) = 8 \\ 2x(s) + (s-1)y(s) = 3 \end{array}\right\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix} = s^2 - 3s + 2 - 6 = s^2 - 3s - 4$$

$k_1 = -1$

$k_2 = 4$

$$\Delta x(s) = (s+1)(s-4)x(s) = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & s-1 \end{vmatrix} = 8s - 17$$

176

$$X(s) = \frac{8s-17}{(s+1)(s-4)}$$

$$x(t) = \lim_{s\to -1} \frac{e^{st}(8s-17)}{s-4} + \lim_{s\to 4} \frac{e^{st}(8s-17)}{s+1}$$

$$x(t) = 5e^{-t} + 3e^{4t}$$

$$\Delta y(s) = (s+1)(s-1)y(s) = \begin{vmatrix} s-2 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3s-22 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(s) \frac{3s-22}{(s+1)(s-4)} \rightarrow$$

$$Y(t) = \lim_{s\to -1} \frac{e^{st}(3s-22)}{s-4} + \lim_{s\to 4} \frac{e^{st}(3s-22)}{s+1}$$

$$Y(t) = 5e^{-t} - 2e^{4t}$$

ÖR

$$\left.\begin{aligned} x' + 4 + Y &= e^{t} \\ -X + Y' + Y &= e^{t} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} sX(s) - X(0) + X(s) + y(s) &= \frac{1}{s-1} \\ -X(s) + sy(s) - Y(0) + y(s) &= \frac{1}{s-1} \end{aligned}\right\}$$

($X(0) \to c_1$, $Y(0) \to c_2$)

$$\left.\begin{aligned} (s+1)X(s) + y(s) &= c_1 + \frac{1}{s-1} \\ -X(s) + (s+1)y(s) &= c_2 + \frac{1}{s-1} \end{aligned}\right) \longrightarrow$$

GIPTA

$$\Delta = \begin{vmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{vmatrix}$$

$= s^2+2s+1+1$

$= s^2+2s+2$

$$\Delta x(s) = (s+1+i)(s+1-i)\,x(s) = \begin{vmatrix} c_1+\frac{1}{s-1} & 1 \\ c_2+\frac{1}{s-1} & s+1 \end{vmatrix}$$

$$= c_1 s + c_1 + \frac{s}{s-1} + \frac{1}{s-1} - c_2 - \frac{1}{s-1}$$

$$x(s) = \frac{c_1 s + c_1}{(s+1+i)(s+1-i)} + \frac{s}{(s-1)(s+1+i)(s+1-i)} - \frac{c_2}{(s+1+i)(s+1-i)}$$

$x(t) =$ ______ bul

$$y(s) = (s+1+i)(s+1-i)\,y(s) = \begin{vmatrix} s+1 & c_1+\frac{1}{s-1} \\ -1 & c_2+\frac{1}{s-1} \end{vmatrix}$$

$$= c_2 s + c_2 + \frac{s}{s-1} + \frac{1}{s-1} + c_1 + \frac{1}{s-1}$$

$$\frac{2}{s-1}$$

$$\frac{s+2}{s-1}$$

$$y(s) = \frac{c_2 s + c_2}{(s+1+i)(s+1-i)} + \frac{s+2}{(s-1)(s+1+i)(s+1-i)}$$

$y(t) =$ ______ bul

178 Parçalı Sistemlere Uygulanış

Ör

$$Y''+Y=\begin{cases}2 & ,0<t<1\\ 0 & ,t\geq 1\end{cases}\quad , Y(0)=Y'(0)=0$$

$$s^2y(s)-sY(0)-Y'(0)+y(s)=\int_0^1 e^{-st}.2dt+\int_1^{\infty}e^{-st}.0\,dt$$

$$=-\frac{2}{s}e^{-st}\Big|_0^1$$

$$=-\frac{2}{s}e^{-s}+\frac{2}{s}$$

$$(s^2+1)y(s)=-\frac{2}{s}e^{-s}+\frac{2}{s}$$

$$y(s)=2\left[-\frac{1}{s(s^2+1)}.e^{-s}+\frac{1}{s(s^2+1)}\right]$$

$(s^2+1)=(s-i)(s+i)$

$\mathcal{L}^{-1}$ ile

$$Y(t)=2\left\{-\lim_{s\to 0}\frac{e^{st}.e^{-s}}{s^2+1}-\lim_{s\to i}\frac{e^{st}.e^{-s}}{s(s+i)}-\lim_{s\to -i}\frac{e^{st}.e^{-s}}{s(s-i)}\right.$$

$$\left.+\lim_{s\to 0}\frac{e^{st}}{s^2+1}+\lim_{s\to i}\frac{e^{st}}{s(s+i)}+\lim_{s\to -i}\frac{e^{st}}{s(s-i)}\right\}$$

$$Y(t)=2\left\{-H(t-1)+\frac{e^{it}.e^{-i}}{2}+\frac{e^{-it}.e^{i}}{2}+1-\frac{e^{it}}{2}-\frac{e^{-it}}{2}\right\}$$

$-\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)\to\cos t$

$$Y(t)=2\left[-H(t-1)+\frac{e^{i(t-1)}+e^{-i(t-1)}}{2}\right]$$

$\to H(t-1)\cos(t-1)$

$$Y(t)=2\left[1-\cos t-H(t-1)+H(t-1)\cos(t-1)\right]$$

veya

GIPTA

$$y(s) = 2\left[\frac{-1}{s(s^2+1)}e^{-s} + \frac{1}{s(s^2+1)}\right]$$

$$\left(\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{a}{s} + \frac{bs+c}{s^2+1}\right)$$

(s^2+1) (s)

$$1 \equiv (a+b)s^2 + cs + a$$

$$\begin{pmatrix} a=1 \\ c=0 \\ b=-1 \end{pmatrix}$$

$$y(s) = 2\left[-\frac{1}{s}e^{-s} + \frac{s}{s^2+1}e^{-s} + \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right]$$

$(H(t-1))$

$\mathcal{L}^{-1}$ ile

$$y(t) = 2\left\{-H(t-1) + H(t-1)\cos(t-1) + 1 - \cos t\right\}$$

$$y(t) = 2\left[1 - \cos t - H(t-1) + H(t-1)\cos(t-1)\right]$$

ÖR

$$y'' + 4y = \begin{cases} 1, & 0<t<1 \\ 0, & t>1 \end{cases} \qquad y(0)=0 \quad y'(0)=1$$

$$s^2 y(s) - s \underset{0}{y(0)} - \underset{1}{y'(0)} + 4y(s) = \int_0^1 e^{-st} \cdot 1 \, dt + \int_1^{\infty} \cancelto{0}{e^{-st} \cdot 0 \, dt}$$

$$(s^2+4)y(s) - 1 = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^1 = -\frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s} \to$$

$$\to y(s) = \frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{s(s^2+4)} - \frac{1}{s(s^2+4)}e^{-s}$$

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{a}{s} + \frac{bs+c}{s^2+4}$$

(s^2+4) (s)

$$a = \frac{1}{4}$$

$$b = -\frac{1}{4}$$

$$1 \equiv (a+b)s^2 + cs + 4a$$

$$c = 0$$

180

$\searrow$ $\mathcal{L}^{-1}$ ile

$$Y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right] - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}e^{-s} - \frac{s}{s^2+4}e^{-s}\right]$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}(1 - \cos 2t) - \frac{1}{4}\left[H(t-1) - H(t-1)\cos 2(t-1)\right]$$